

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

532.59

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ***Б. Б. Кадомцев, В. И. Карман*

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	193
2. Простые волны . . . . .	194
3. Нелинейные волны в слабо диспергирующих средах . . . . .	197
4. Самофокусировка и самосжатие волновых пакетов . . . . .	211
5. Электрорезонансные волны . . . . .	222
6. Динамическое и стохастическое взаимодействие волн . . . . .	223
7. Заключение . . . . .	230
Цитированная литература . . . . .	231

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Насколько широко распространено волновое движение в природе, вряд ли нужно повторять — волны на поверхности тяжелой жидкости, упругие волны, электромагнитные волны, волны в плазме — это лишь наиболее яркие представители обширного семейства волн в непрерывных средах. Свойства таких волн в линейном приближении изучены достаточно хорошо. Однако в действительности очень часто амплитуда волн оказывается не малой, и мы имеем дело с нелинейными волновыми движениями. Всем хорошо известны нелинейные волны на воде, почти столь же часто образуются нелинейные волны в плазме, а открытие лазеров привело к широкому кругу нелинейных эффектов в оптике. Нелинейные эффекты в волновом движении явились объектом интенсивных исследований в последние годы, и при этом было обнаружено много новых интересных физических явлений. Сюда, кроме ставшего уже банальным эффекта умножения частоты, относятся явления самофокусировки и самосжатия волновых пакетов, наиболее хорошо изученные в оптике, эффекты индуцированного рассеяния, получившие в физике плазмы название распадов волн, стохастическое взаимодействие волн — слабая турбулентность и т. д. В разных областях физики эти эффекты, несмотря на их тождественность, по существу, описываются в несколько различных терминах, и не всегда указывается на их аналогию с родственными явлениями в других областях. Учитывая это обстоятельство, а также принимая во внимание, что в вопросах понимания нелинейных явлений в волновых движениях достигнута определенная ясность и полученные результаты представляют интерес для достаточно широкого круга физиков, мы сочли целесообразным составить настоящий обзор, в котором с единой точки зрения и в сравнительно простой форме излагаются основные результаты в этой области. Нам, естественно, придется повторить и хорошо известные вещи, но мы постараемся их изложить с общей точки зрения.

Как мы увидим ниже, характер нелинейных процессов существенно зависит от дисперсии, т. е. от зависимости фазовой скорости от волнового числа. Поэтому естественно начать рассмотрение со случая недиспергирующих сред, а затем учесть эффекты дисперсии.

## 2. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

### 2.1. Пучок невзаимодействующих частиц

В качестве наиболее простого примера недиспергирующей среды рассмотрим пучок невзаимодействующих частиц. Скорость каждой частицы такого пучка остается постоянной, так что

$$\frac{dv}{dt} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2,1)$$

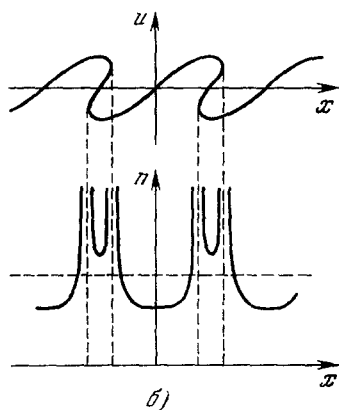
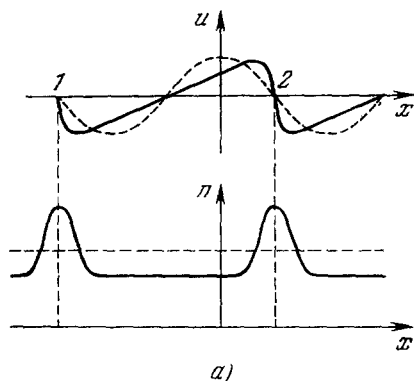


Рис. 1.

Совокупность невзаимодействующих частиц, разумеется, не является нелинейной системой, однако уравнение (2,1) выглядит как нелинейное и имеет, как мы увидим, решения, обладающие характерными свойствами нелинейных волн.

Рассмотрим сначала малые колебания вблизи однородного пучка с постоянной скоростью  $v_0$ :  $v = v_0 + v'$ . Полагая  $v' \sim \exp(-i\omega t + ikx)$  и линеаризуя (2,1), получим соотношение между частотой  $\omega$  и волновым числом возмущения:

$$\omega = kv_0. \quad (2,2)$$

Отсюда видно, что в линейном приближении мы имеем дело с недиспергирующей средой,  $v_f = \frac{\omega}{k} = \text{const}$ . Допустим теперь, что начальное возмущение скорости имеет вид  $\sim \sin kx$ . Эволюцию этого возмущения удобно рассмотреть в движущейся со скоростью  $v_0$  системе

координат, полагая  $v = v_0 + u$ . В этой системе имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2,3)$$

Представим себе фазовую плоскость  $(x, u)$  (рис. 1, а). На этой плоскости начальное состояние пучка представляется синусоидой 1. Со временем все фазовые точки, включая точки пучка, перемещаются со скоростью, пропорциональной удалению от оси  $x$ , и профиль волны искажается — частицы с  $u > 0$  забегают вперед, а с  $u < 0$  отстают от волны. Этот эффект приводит к возмущению плотности — в точках 1, 2 с повышенной крутизной частицы сгущаются и плотность возрастает. Происходит так называемая «бунчировка» частиц. Именно такого типа бунчировка используется

для генерирования ВЧ колебаний в клистродах. Возрастание плотности продолжается до тех пор, пока производная  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , а вместе с ней и плотность в точках 1, 2, не обратится в бесконечность. Затем происходит «опрокидывание» волны  $u(x, t)$ , а на плотности появляется удвоенное число особенностей (рис. 1, б).

При  $t \rightarrow \infty$  точки поворота раздвигаются, число встречных пучков неограниченно возрастает, и плотность опять стремится к постоянной с малыми «пичками». При этом в каждой точке пространства имеется очень много пучков с самыми разнообразными скоростями, так что приближенно можно говорить о функции распределения  $f(u)$  по скоростям, имеющей вид «столика». Разумеется, весь этот процесс полностью обратим — достаточно изменить все скорости частиц на обратные, как из многопучкового, на первый взгляд однородного, состояния начнут появляться колебания: число пучков станет уменьшаться, появятся «пички» на плотности, и наконец, система придет к первоначальному состоянию. После этого опять начнется «опрокидывание» и образование многопотокового движения, но уже влево, а не вправо, как показано на рис. 1, а.

Итак, пучок невзаимодействующих частиц обладает многими свойствами нелинейной системы — в нем происходит «опрокидывание» волны и генерация высших гармоник, а также усиление малых колебаний плотности за счет ее нелинейной связи со скоростью.

## 2.2. Простые волны в газе

Рассмотрим теперь нелинейные волны в сплошных средах. Начнем с обычной газодинамики. Распространение одномерных нелинейных звуковых волн описывается уравнениями газодинамики:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{mn} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (2,4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (nv) = 0. \quad (2,5)$$

Мы будем считать, что  $p$  связано с  $n$  уравнением состояния (изотермой или адиабатой), и введем обозначение  $c_s^2 = \frac{1}{m} \frac{dp}{dn}$  для квадрата скорости звука.

Среди огромного множества нелинейных решений уравнений газодинамики важную роль играют так называемые простые волны. Эти волны являются обобщением бегущих линейных волн — они распространяются в одну сторону, и при этом, как и в линейных волнах, плотность  $n$  однозначно определяется величиной  $v$ , т. е.  $n = n(v)$ . Следовательно, для простых волн уравнения (2,4), (2,5) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + c_s^2 \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (2,6)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{dn}{dv} + n \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (2,7)$$

Умножая первое из этих уравнений на  $dn/dv$  и вычитая из второго, получим после сокращения на  $\partial v/\partial z$

$$c_s^2 \left( \frac{dn}{dv} \right)^2 = n^2. \quad (2,8)$$

Отсюда получаем

$$c_s \frac{dn}{dv} = \pm n. \quad (2,9)$$

Подставляя это значение в уравнение (2,6), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm c_s) \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (2,10)$$

Таким образом, мы получаем уравнение такого же вида, как и для пучка невзаимодействующих частиц, с той лишь разницей, что теперь перед нелинейным членом стоит множитель  $v \pm c_s$  вместо  $v$ .

Если использовать уравнение адиабатического процесса  $c_s^2 = \frac{1}{m} \frac{dp}{dn} = c_{s0}^2 \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\gamma-1}$ , то из (2,9) следует  $c_s(v) = c_{s0} + \frac{\gamma-1}{2} v$ , где  $c_{s0}$  — скорость волны в линейном приближении, а  $\gamma$  — показатель адиабаты газа. Подставляя это в (2,10), получим уравнение для простой волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $z$ , в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(c_{s0} + \frac{\gamma+1}{2} v\right) \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (2,11)$$

Если перейти к системе отсчета, движущейся со скоростью звука в линейном приближении  $c_{s0}$  ( $z = x + c_{s0}t$ ) и ввести новый масштаб для скорости возмущения  $u = \frac{\gamma+1}{2} v$ , то мы получим в точности уравнение (2,3).

Отсюда следует хорошо известный результат, что для профиля скорости звуковых волн большой амплитуды также должно иметь место явление укрупнения. В обычной газодинамике это укрупнение продолжается все время, пока скорость  $v(z)$  остается однозначной. Но как только  $\partial v/\partial z$  обратится в бесконечность, начинает формироваться ударная волна, на фронте которой происходит диссипация энергии за счет вязкости.

### § 2.3. У р а в н е н и е Б ю р г е р с а

Влияние вязкости на эволюцию простой волны можно просто учесть, добавляя член  $\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$  к правой части уравнения (2,11). Вместо уравнения (2,3) тогда получится так называемое уравнение Бюргерса<sup>1</sup>

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2,12)$$

где  $\mu$  — коэффициент затухания звука в линейном приближении.

Оказывается, что общее решение уравнения Бюргерса можно получить в замкнутом аналитическом виде<sup>2</sup>.

Действительно, если положить

$$u = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi(x, t), \quad (2,13)$$

то для  $\varphi(x, t)$  получится уравнение теплопроводности  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ , имеющее хорошо известные решения. С их помощью нетрудно проследить за эволюцией любого начального профиля скорости. Рассмотрим, например, как будет изменяться со временем возмущение  $u_0(x) = u(x, t=0)$ , имеющее вид некоторого ограниченного по  $x$  импульса. Интегрируя уравнение (2,12) по  $x$ , нетрудно убедиться, что площадь профиля скорости

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx \quad (2,14)$$

не меняется со временем, т. е. является «интегралом движения». Из соотношения (2,13) видно, что  $M$  определяет перепад «температур»:

$\varphi(+\infty)/\varphi(-\infty) = \exp(-M/2\mu)$ . Но при заданном перепаде температур независимо от профиля переходного слоя решение уравнения теплопроводности будет стремиться при  $t \rightarrow \infty$  к автомодельному, соответствующему наличию в начальный момент времени  $t = 0$  резкого перехода от одной «температуры»,  $\varphi_1 = \varphi(+\infty)$ , к другой,  $\varphi_2 = \varphi(-\infty)$ , в точке их «соприкосновения»  $x = 0$ . Отсюда следует, что при  $t \rightarrow \infty$  профиль скорости  $u(x, t)$  будет стремиться к некоторому универсальному асимптотическому значению, определяемому только величиной константы  $M$ . В частности, при  $\mu \rightarrow 0$ , как можно показать, профиль  $u(x, t)$  при  $M > 0$  стремится к значению

$$u_{(\mu \rightarrow 0)}(x, t) = \begin{cases} x/t & \text{при } 0 < x < \sqrt{2Mt}, \\ 0 & \text{при } x < 0, x > \sqrt{2Mt}, \end{cases} \quad (2,15)$$

т. е. он имеет вид расширяющегося треугольника с ударной волной на передней части профиля. При  $M < 0$  треугольник направлен острием вниз, а ударная волна образуется на его задней части. Величина скачка в ударной волне равна  $(2M/t)^{1/2}$ , т. е. она убывает как  $t^{-1/2}$ , а ширина профиля, наоборот, растет пропорционально корню из времени, так что полная площадь возмущения не изменяется и остается равной  $M$  (ср. § 95 в книге <sup>3</sup>).

Уравнение Бюргерса имеет также стационарное решение, описывающее профиль, перемещающийся без деформации с постоянной скоростью  $c$ . В самом деле, если подставить

$$u = f(x - ct) \quad (2,16)$$

в уравнение (2,12), то мы получим дифференциальное уравнение второго порядка для  $f$ :

$$(f - c) \frac{df}{dx} = \mu \frac{d^2f}{dx^2}. \quad (2,17)$$

Ограниченное на  $\infty$  решение этого уравнения имеет вид

$$f(\xi) = u_0 + \frac{\Delta u}{1 + \exp[(\Delta u/2\mu)\xi]}, \quad c = u_0 + \frac{\Delta u}{2}, \quad (2,18)$$

где  $u_0$ ,  $\Delta u$  — постоянные. Это решение представляет собой ударную волну с величиной скачка  $\Delta u$  и шириной переходной области  $\delta = 2\mu/\Delta u$ . При  $\mu \rightarrow 0$  ширина  $\delta$  также стремится к нулю. С помощью (2,13) можно показать, что к этой волне асимптотически стремится со временем любое возмущение с перепадом скоростей  $\Delta u$ .

Таким образом, видно, что уравнение Бюргерса достаточно полно описывает общую картину формирования и структуры ударных волн. Для слабых волн это описание является достаточно точным и в количественном отношении (см. также <sup>4</sup>).

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СЛАБО ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

#### 3.1. Нелинейность и дисперсия

Рассмотренный в п. 2.1 процесс укрупнения и опрокидывания волн существенно связан с отсутствием дисперсии (или диссипации, которую можно рассматривать как «мнимую» дисперсию). Именно из-за отсутствия дисперсии все волны малой амплитуды с различными волновыми числами  $k$  распространяются с одинаковой скоростью и имеют возможность длительное время взаимодействовать между собой, так что даже небольшая нелинейность рано или поздно должна привести к накоплению искажения.

Влияние диссипации мы выяснили в разделе 2.3. Ниже будет рассмотрена дисперсия в пренебрежении диссипативными эффектами.

В этом случае фазовая скорость волн с различными  $k$  неодинакова, и поэтому при не очень большой амплитуде волны дисперсия может конкурировать с нелинейностью. Высшие гармоники, которые порождаются при нелинейном искажении волны, за счет дисперсии будут обгонять основную волну или отставать от нее, в зависимости от того, растет или убывает групповая скорость с  $k$ . Вследствие этого еще до опрокидывания волна может «расползтись» на отдельные волновые пакеты (вообще говоря, нелинейные), и ударная волна не образуется. Чтобы проследить более детально за физикой этого явления, не усложненного побочными процессами, мы рассмотрим слабо диспергирующую среду без диссипации \*).

### 3.2. Волны в мелкой воде

В природных условиях существует объект, легко доступный для наблюдения распространения волн в слабодиспергирующих средах, — это мелкая вода. Рассмотрим слой жидкости высотой  $h_0$ , налитый над твердой поверхностью, и рассмотрим гравитационные волны в таком слое с длиной волны, много большей  $h_0$ . Для простоты допустим, что волны распространяются вдоль оси  $x$ , так что давление  $p$  и скорость  $v$  от переменной  $y$  не зависят. Если длина волны велика, т. е. вода мелкая, то горизонтальную составляющую скорости можно считать однородной по высоте (не зависящей от  $z$ ), так что для  $v_x = v$  имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (3,1)$$

Здесь давление  $p$  можно понимать в смысле среднего его значения по высоте. Оно, очевидно, больше там, где высота жидкости больше, на величину  $(h - h_0) \rho g$  по сравнению с давлением в невозмущенном слое. Таким образом, уравнение (3,1) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3,2)$$

Высота  $h$ , в свою очередь, определяется уравнением непрерывности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hv) = 0, \quad (3,3)$$

которое выражает тот факт, что скорость изменения высоты слоя  $\frac{\partial h}{\partial t}$  связана с разностью потоков  $hv$  через бесконечно близкие сечения  $x$  и  $x + dx$ .

Уравнения (3,2), (3,3) по форме совпадают с уравнениями газодинамики с  $\gamma = 2$ . Это значит, что в линейном приближении волны на мелкой воде не имеют дисперсии, а в нелинейной волне должен иметь место эффект укручения и опрокидывания волны. Для простой волны эти уравнения приводятся к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( \frac{3}{2} v \pm c_0 \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3,4)$$

где  $c_0 = \sqrt{gh_0}$  — фазовая скорость волны малой амплитуды. Переходя в систему координат, движущуюся со скоростью  $\pm c_0$ , и полагая  $u = \frac{3}{2}v$ , мы опять приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3,5)$$

являющемуся общим для широкого класса недиспергирующих сред.

\*) Слабодиспергирующей называется такая среда, в которой дисперсия появляется лишь при достаточно больших значениях волнового числа  $k$ .

### 3.3. Уравнение Кортевега — де Вриза

Фазовая скорость очень длинных волн на мелкой воде не зависит от волнового числа  $k$  и равна просто  $\sqrt{gh_0}$ . Однако при увеличении  $k$  она должна начать изменяться, чтобы при очень больших  $k \gg h_0^{-1}$  перейти в зависимость  $v_f = \sqrt{g/k}$  для гравитационных волн на глубокой воде. Так как при больших  $k$  фазовая скорость убывает и, кроме того,  $v_f$  является четной функцией от  $k$ , то при малых  $k$  она может быть представлена в виде

$$v_f = c_0 \left( 1 - \frac{k^2}{k_0^2} \right), \quad (3,6)$$

где величина  $1/k_0$  определяет характерную «длину дисперсии», для которой изменение  $v_f$  становится порядка единицы. Для волн на мелкой воде  $k_0 = \sqrt{6/h_0}$  \*).

Постараемся теперь учесть дисперсию в уравнении для простых волн. Рассмотрим для определенности волну, распространяющуюся вправо, т. е. с  $v_f > 0$ . В линейном приближении для такой волны в системе координат, движущейся со скоростью  $c_0$ , мы должны согласно (3,6) получить частоту  $\omega = -c_0 k^3/k_0^2$ , т. е. соответствующее уравнение в переменных  $x, t$  должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0}{k^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3,7)$$

Но, с другой стороны, при конечной амплитуде уравнение должно содержать нелинейный член  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Таким образом, полное уравнение, описывающее нелинейные волны на мелкой воде, должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3,8)$$

где величина  $\beta$ , которую мы будем называть параметром дисперсии, равна  $c_0/k_0^2$ .

Это уравнение было получено Кортевегом и де Вризом в 1895 г. <sup>5</sup> для волн на воде и недавно в работах <sup>6-8</sup> для волн в плазме. Из приведенных выше соображений ясно, что уравнение Кортевега—де Вриза имеет гораздо более широкий круг применений — оно описывает «квазипростые» волны для любой среды с дисперсией (3,6), которую принято называть отрицательно диспергирующей. Если фазовая скорость возрастает с  $k$ , т. е. при малых  $k$   $v_f = c_0 \left( 1 + \frac{k^2}{k_0^2} \right)$ , то среду называют положительно диспергирующей.

Для сред с положительной дисперсией следовало бы изменить знак перед последним слагаемым в уравнении (3,8). Но если при этом еще сделать замену  $x \rightarrow -x, u \rightarrow -u$ , то мы снова получим уравнение вида (3,8). Так как  $x$  у нас отсчитывается от точки  $c_0 t$ , то это значит, что в средах с положительной и отрицательной дисперсией волны распространяются зеркально симметрично по отношению к точке  $x_0 = c_0 t$ , движущейся со скоростью длинноволновых возмущений. В силу этого достаточно рассмотреть лишь случай среды с отрицательной дисперсией, например, мелкую воду.

\*) Правая часть (3,6) есть первые два члена разложения точного выражения  $v_f = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{th}(kh)}$  по степеням  $k$  (см., например, <sup>3</sup>).

## 3.4. Волны в плазме

Другим примером слабодиспергирующей среды может служить плазма в магнитном поле. Длинноволновые возмущения в такой плазме распространяются со скоростью, не зависящей от волнового числа, и только при достаточно больших частотах появляется дисперсия. Соответственно, распространение таких волн описывается уравнением Кортвега — де Вриза.

Рассмотрим, например, случай распространения магнитозвуковой волны в плазме, помещенной в сильное магнитное поле.

Если волна распространяется под углом  $\alpha$  к сильному магнитному полю  $H_0$  (энергия которого значительно превышает тепловую энергию плазмы:  $H_0^2/8\pi \gg nT$ ), причем угол  $\alpha$  удовлетворяет соотношению

$$\alpha^2 \gg \frac{kc}{\omega_{0i}}, \quad \omega_{0i} = \frac{4\pi ne^2}{m_i} \quad (3,9)$$

(это условие исключает волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля и близкие к ним), то величина

$$h = H_z - H_0 \sin \alpha$$

при условии  $h/(H_0 \sin \alpha) \ll 1$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$h_t + \left( c_A + \frac{3}{2} h c_A \frac{\sin \alpha}{H_0} \right) h_x + \beta h_{xxx} = 0, \quad (3,10)$$

где

$$c_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad \beta = c_A \frac{c^2}{2\omega_{0i}^2} \left( \frac{m_e}{m_i} - \text{ctg}^2 \alpha \right), \quad (3,11)$$

$c$  — скорость света. Все остальные величины, описывающие волну (плотность  $\rho$ , макроскопические скорости  $v_e$ ,  $v_i$  и т. д.), выражаются через  $h$ . Таким образом, уравнение (3,10) относится к типу Кортвега — де Вриза.

Обратим внимание на характерное поведение параметра дисперсии  $\beta$  в зависимости от угла  $\alpha$  между направлениями распространения и магнитным полем. При

$$\text{ctg} \alpha < \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (3,12)$$

(почти «поперечные» волны) параметр  $\beta$  положителен и по порядку величины равен  $\beta \sim c_A \frac{c^2}{\omega_{0e}^2}$ . При  $\text{ctg} \alpha > \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}$  параметр дисперсии меняет знак и соответствующие волны нужно считать «косыми». В этом случае параметр  $\beta$  не только отрицателен, но имеет и существенно другую величину,  $\beta \sim c_A \frac{c^2}{\omega_{0i}^2}$ . Соответственно, длина дисперсии  $\delta \sim k_0^{-1}$  для перпендикулярного и «косого» распространения имеет разные порядки величин:

$$\begin{aligned} \delta &\sim \frac{c}{\omega_{0e}}, \quad \text{если} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha < \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}, \\ \delta &\sim \frac{c}{\omega_{0i}}, \quad \text{если} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha > \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим ионно-звуковые волны в плазме без магнитного поля.

Допустим, что ионная температура мала по сравнению с электронной. В этом случае плазма достаточно хорошо описывается гидродинамическими



уравнениями с показателем адиабаты  $\gamma = 1$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} = -\frac{c_0^2 \nabla n}{n}, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) = 0, \quad (3,13)$$

где

$$c_0^2 = T_e/m_i, \quad (3,14)$$

и пренебрегается отклонениями от квазинейтральности ( $n_e = n_i = n$ ), что справедливо, если электронный дебаевский радиус  $D = \sqrt{T_e/4\pi n e^2}$  пренебрежимо мал по сравнению с характерными длинами волн. Учет конечности дебаевского радиуса в первом неисчезающем приближении приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} + c_0^2 \frac{\nabla n}{n} + \frac{2c_0\beta}{n_0} \nabla(\Delta n) &= 0, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (3,15)$$

где  $\beta = c_0 D^2/2$ .

В линейном приближении уравнения (3,15) приводят к дисперсионному уравнению

$$\omega(k) = c_0 k \left( 1 - \frac{k^2 D^2}{2} \right), \quad (3,16)$$

правая часть которого представляет собой первые два члена «точного» дисперсионного уравнения  $\omega = \sqrt{\frac{T}{m_i}} k (1 + k^2 D^2)^{-1/2}$ .

В этом случае также можно написать уравнение Кортевега — де Вриза <sup>9, 10</sup>, которое имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + v) \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \quad (3,17)$$

причем согласно (3,16) величина  $\beta = c_0 D^2/2$  положительна, а длина дисперсии — порядка дебаевского радиуса.

### 3.5. Периодические волны, солитоны

Рассмотрим сначала периодические решения уравнения Кортевега — де Вриза типа бегущих волн  $u = u(x - ct)$ , где  $c$  — фазовая скорость. Для таких волн  $\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$ , так что (3,8) из уравнения в частных производных становится обыкновенным. Его сразу можно проинтегрировать один раз и получить

$$\beta \frac{d^2 u}{dx^2} = a + cu - \frac{1}{2} u^2, \quad (3,18)$$

где  $a$  — константа интегрирования, которую мы без ограничения общности положим равной нулю (это всегда можно сделать при помощи перехода в движущуюся систему координат). Тогда уравнение (3,18) может быть представлено в виде:

$$\beta \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\partial W}{\partial u}, \quad (3,19)$$

где

$$W = -\frac{cu^2}{2} + \frac{u^3}{6}. \quad (3,20)$$

Уравнение (3,19) можно рассматривать как уравнение движения для нелинейного осциллятора — материальной точки массы  $\beta$ , движущейся в потенциальной яме  $W(u)$ , причем координата  $x$  играет роль времени. Потенциальная энергия  $W$  как функция  $u$  изображена на рис. 2. Она обращается в нуль при  $u = 0$ ,  $u = 3c$  и достигает минимума при  $u = 2c$ .

При колебаниях вблизи минимума потенциальной энергии  $W(u)$  волна является практически гармонической:

$$u = 2c + u_0 \exp \left\{ i \sqrt{\frac{c}{\beta}} (x - ct) \right\}.$$

Как мы видим,  $u$  колеблется около значения  $2c$ , т. е. в системе координат, движущейся со скоростью  $2c$ , где колебания происходят около нулевого значения, волна распространяется со скоростью  $c$  влево, как и должно быть при отрицательной дисперсии. При этом, поскольку  $k = \sqrt{\frac{c}{\beta}} = k_0 \sqrt{\frac{c}{c_0}}$ , добавка к фазовой скорости  $c$  равна  $c_0 \frac{k^2}{k_0^2}$ , как и следует из дисперсионного соотношения.

По мере увеличения амплитуды колебаний волна становится все более и более несимметричной (как видно из графика для потенциальной энергии); частица дольше будет проводить время при малой скорости  $u$ , где упругость меньше, и быстрее проскакивать значения с большими  $u$  (см. рис. 2 и 3). И наконец, когда амплитуда увеличится настолько, что станут возможны значения  $u = 0$ , появляются решения типа уединенных волн, или солитонов, когда по жидкости распространяется один-единственный импульс. При этом «точка»  $u$  «бесконечно долго» находится в положении  $u = 0$ , затем «скатывается» в потенциальную яму  $W(u)$ , достигает значения  $u = 3c$ , где  $W = 0$ , отражается от нее и снова возвращается в положение  $u = 0$ . Соответствующее решение имеет вид

$$u = \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \left( \frac{x-ct}{\Delta} \right)}. \quad (3,21)$$

Амплитуда  $a$  и ширина  $\Delta$  уединенной волны даются соотношениями

$$a = 3c, \quad \Delta = 2 \sqrt{\frac{\beta}{c}} = \frac{2}{k_0} \sqrt{\frac{c_0}{c}}. \quad (3,22)$$

Отсюда видно, что чем больше скорость солитона  $c$ , тем он больше по амплитуде и уже по ширине.

Если амплитуда волны  $a$  лишь чуть меньше  $3c$ , то решение имеет вид периодически следующих один за другим импульсов, очень близких по форме к солитонам (рис. 3).

Таким образом, по мере увеличения амплитуды колебаний фазовая скорость из отрицательной становится положительной и возрастает до значения  $a/3$  у уединенных волн.

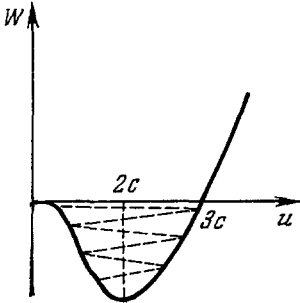


Рис. 2.

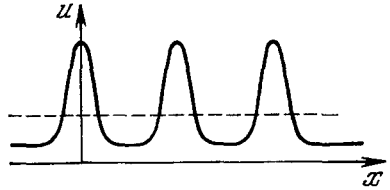


Рис. 3.

3.6. Эволюция начального возмущения

Обсудим теперь вопрос о возбуждении колебаний начальным возмущением конечной амплитуды. Для простоты ограничимся одномерным случаем, предполагая, что возмущение является бесконечно протяженным и однородным и вдоль оси  $y$ .

Пусть в начальный момент  $t = 0$  создается некоторое возмущение скорости с амплитудой  $u_0$  и шириной порядка  $\Delta$ . Если  $u_0 \ll c_0$ , то возмущение можно считать слабо нелинейным. В этом случае возмущение достаточно быстро, пока еще не успеет проявиться нелинейность, распадается на два, бегущих в разные стороны со скоростью  $\approx c_0$  и представляющих собой простые волны. Поэтому нам достаточно проследить за медленной эволюцией лишь одной простой волны, т. е. достаточно исследовать нестационарные решения уравнения Кортевега — де Вриза. Отсюда, в частности, видно, почему простые волны имеют большее значение, чем какие-либо другие, быть может, даже более общие нелинейные решения.

Нестационарные решения уравнения Кортевега — де Вриза вначале были исследованы численно<sup>11, 13</sup>, и только позднее была построена их аналитическая теория<sup>14</sup> (см. также<sup>15</sup>). Но качественная картина может быть изложена весьма просто с помощью следующих простых рассуждений.

Допустим сначала, что начальное возмущение по форме в точности совпадает с солитоном, т. е.  $u(x, t = 0) = u_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{\Delta}\right)$ . Тогда это возмущение могло бы распространяться как солитон, если бы его амплитуда была связана со скоростью соотношением

$$u_0 \Delta^2 = 12\beta = \frac{12c_0}{k_0^3} = \text{const}, \quad (3,23)$$

вытекающим из выражений (3,22). Другими словами, безразмерная величина

$$\sigma = \sqrt{\frac{u_0}{c_0}} (k_0 \Delta) = \Delta \sqrt{\frac{u_0}{\beta}} \quad (3,24)$$

для солитона равна  $\sigma_c = \sqrt{12}$ . Но величина  $\sigma^2$  пропорциональна амплитуде, и поэтому ее можно рассматривать как параметр нелинейности волны: при малых  $\sigma^2$  возмущение имеет очень малую амплитуду и его можно считать «почти» линейным, при  $\sigma^2 = 12$  образуется уединенная волна, а при  $\sigma^2 \gg 12$  амплитуда настолько велика, что решение имеет вид, существенно отличающийся от бегущей стационарной волны.

Нетрудно видеть, почему в слабодиспергирующей среде показателем нелинейности служит именно произведение амплитуды на квадрат ширины, а не более, казалось бы, естественная величина отношения амплитуды волны  $u_0$  к характерной фазовой скорости  $c_0$ . Это связано с тем, что в отсутствие диссипации одномерная волна сколь угодно малой амплитуды в недиспергирующей среде является нелинейной — она обязательно рано или поздно «опрокинется». Именно дисперсия не даст этому произойти, и поэтому амплитуду  $u_0$  следует сравнить не с фазовой скоростью  $c_0$  длинноволновых возмущений, а с добавкой  $c_0 \frac{k^2}{k_c^2} \sim c_0 (k_0 \Delta)^2$ , связанной с дисперсией, так что показателем нелинейности служит величина  $\frac{u_0}{c_0} (k_0 \Delta)^2$ ,

Если начальное возмущение не совпадает по профилю с солитоном, но имеет вид импульса ширины  $\Delta$  и амплитуды  $u_0$ , то в качестве параметра нелинейности опять можно принять величину  $\sigma$ . При  $\sigma \ll \sigma_c$  мы имеем дело с почти линейным возмущением. Характер распространения волн

от такого возмущения мы уже рассмотрели ранее — длинноволновая часть спектрального разложения такого возмущения по  $k$  распространяется со скоростью, близкой к  $c_0$ , а коротковолновые составляющие отстают от основного импульса.

Большой интерес представляет случай сильно нелинейного возмущения  $\sigma \gg \sigma_c$ , когда ширина  $\Delta$  велика. На первой стадии эволюции такого возмущения дисперсия не играет роли и его поведение определяется нелинейностью. Это значит, что в импульсе должно происходить укрупнение переднего фронта и он имеет тенденцию к опрокидыванию. Однако при появлении высоких гармоник в игру вступает дисперсия, которая должна «разводить» возмущения с различными длинами волн. Поэтому по прошествии достаточно большого промежутка времени возмущение должно «рассыпаться» — разбиваться на отдельные группы, аналогичные группам волн в линейном случае.

Каждой группе можно сопоставить свое «локальное» значение параметра  $\sigma = \sigma_L$ . Если  $\sigma_L < \sigma_c$ , то группа в конечном итоге трансформируется в слабонелинейный волновой пакет. При  $\sigma_L > \sigma_c$  группа опять должна распасться на более мелкие осцилляции. При этом будут образовываться импульсы, где  $\sigma_L$  мало отличается от критического значения  $\sigma_c$ ; естественно ожидать, что такие импульсы со временем превратятся в солитоны. Таким образом, с течением времени начальный импульс с  $\sigma > \sigma_c$  должен трансформироваться в некоторое число солитонов и слабонелинейный волновой пакет.

Все солитоны движутся со скоростью  $c > c_0$ , притом тем большей, чем больше амплитуда солитона  $u_0$ , а волновой пакет, расплывающийся со временем и уменьшающийся по амплитуде, отстает от точки  $x = c_0 t$ .

Эта картина полностью соответствует численным расчетам. На рис. 4, например, представлены результаты численного решения уравнения Кортевега — де Вриза для начального импульса с  $\sigma = 10$ . Это решение было получено в работе<sup>12</sup>. Как мы видим, возмущение распалось на 4 солитона и коротковолновый пакет малой амплитуды. Нетрудно заметить, что вершины солитонов лежат на одной прямой. Этот факт имеет простое объяснение. Дело в том, что скорость солитона, как мы знаем, равна  $c = u_0/3$ , т. е. она пропорциональна его амплитуде. Поэтому расстояние  $\Delta x = ct = u_0 t/3$ , пройденное солитоном за время  $t$  от точки  $x = c_0 t$ , отвечающей «начальному» положению возмущения, пропорционально  $u_0$ . Другими словами, все солитоны вышли из одной точки и поэтому пройденное ими расстояние пропорционально скорости.

При более общем начальном распределении солитонов картина становится более сложной. Но если амплитуда плавно меняется в пространстве, т. е.  $u_0 = u_0(x)$ , то из условия постоянства скорости отдельного солитона имеем

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{u_0}{3} \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad (3,25)$$

т. е. мы опять получаем нелинейное уравнение типа уравнения для простой волны. Это значит, что волна огибающей для солитонов должна эволюционировать во времени как простая волна — она должна укрупняться. Опрокидывания при этом не происходит — просто на первое место выходит солитон, который движется с максимальной скоростью.

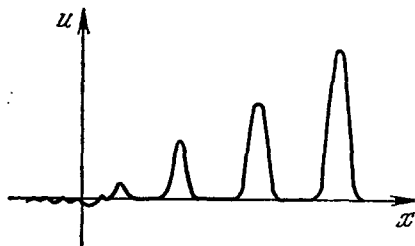


Рис. 4.

Примером процесса расщепления волны на солитоны может служить эволюция синусоидального возмущения большой амплитуды, представленная на рис. 5. Численное решение этой задачи было получено Забуским и Крускалом, из работы которых <sup>11</sup> и заимствован рис. 5. На этом рисунке изображен только один период — вся картина должна быть периодически продолжена в обе стороны. Как мы видим, вначале синусоидальное возмущение эволюционирует как простая волна — она увеличивает свою крутизну и имеет тенденцию к опрокидыванию. Однако перед самым

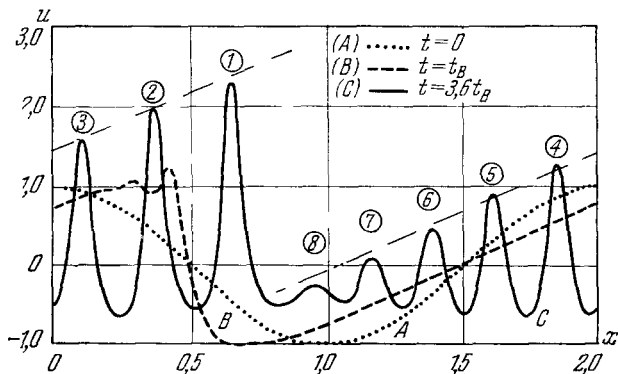


Рис. 5.

опрокидыванием в игру вступает дисперсия и начинает отделяться первый солитон. Постепенно все возмущение распадается на совокупность солитонов, которые сами образуют «простую волну» и в некоторый не очень большой момент времени их амплитуды лежат на одной прямой (кривая C). Затем начинается образование «многопотокового» состояния — солитоны с большей амплитудой обгоняют более медленные, так что происходит пересечение траекторий солитонов.

Следует иметь в виду, что солитоны могут образоваться лишь в том случае, если начальное возмущение  $u(x, 0)$  имеет положительную амплитуду (в среде с отрицательной дисперсией). Если начальное возмущение всюду имеет отрицательную амплитуду, то оно не может породить солитоны. В этом случае оно эволюционирует в нелинейный волновой «хвост», отвечающий периодическим решениям (см. ниже).

Все сказанное выше относится и к средам с положительной дисперсией с соответствующей модификацией: в таких средах солитоны отвечают не «горбам», а «впадинам», причем все солитоны движутся со скоростью, меньшей  $c_0$ , а волновой «хвост» малой амплитуды — со скоростью, большей  $c_0$ . Поэтому его более уместно называть не «хвостом», а «предвестником». В средах с положительной дисперсией солитоны образуются лишь при отрицательной амплитуде возмущения.

### 3.7. Законы сохранения

Уравнение Кортевега — де Вриза может быть написано в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \beta u_{xx} \right) = 0, \tag{3,26}$$

имеющей вид закона сохранения «импульса»  $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ . Умножая обе части уравнения Кортевега — де Вриза на  $u$  и  $u^2$ , после несложных

вычислений получим еще два закона сохранения, из которых первый выражает сохранение «энергии»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u^3}{3} + \beta \left( uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^3}{3} - \beta u_x^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u^4}{4} + \beta \left( u^2 u_{xx} + 2u u_x \right) + \beta^2 u_{xx}^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3,27)$$

Оказывается, что этим число законов сохранения не исчерпывается. В работе <sup>16</sup> было показано, что уравнению Кортевега — де Вриза отвечает бесконечное число сохраняющихся величин (инвариантов)  $I_m = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, t) dt$ , плотности которых  $Q_m(t)$  удовлетворяют соотношениям вида

$$\frac{\partial Q_m(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_m(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3,28)$$

и являясь полиномами от  $\beta$ ,  $u$ , производных  $u_x$ ,  $u_{xx}$ ,  $u_{xxx}$ , ... (производные по  $t$  можно исключить с помощью уравнения Кортевега — де Вриза). Рассмотрим теперь общую структуру плотностей  $Q[u]$  как «функционалов» от  $u$ . Если расположить члены в  $Q_m[u]$  в порядке возрастания степеней  $\beta$ , то член, не содержащий  $\beta$ , всегда пропорционален  $u^m$ ; пользуясь тем, что величина  $Q_m$  определяется с точностью до постоянного множителя, удобно писать этот член в виде  $\frac{u^m}{m}$ . Далее, величина  $Q_m[u]$  содержит члены с  $\beta^k$  ( $k = 1, 2, \dots, m-2$ ), причем коэффициенты при  $\beta^k$  имеют вид некоторых полиномов  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_{xx}$ , ..., общую структуру которых можно установить из соображений размерности.

Общий алгоритм получения численных коэффициентов при отдельных слагаемых в  $Q_m[u]$  довольно громоздок и здесь рассматриваться не будет. (По этому поводу см. <sup>16</sup>.) Приведем лишь первые два члена в разложении  $Q_m[u]$  по степеням параметра  $\beta$ :

$$Q_m[u] = \frac{u^m}{m} - \beta \frac{(m-1)(m-2)}{2} u_x^2 u^{m-3} + O(\beta^2). \quad (3,29)$$

### 3.8. Аналитические соотношения

Рассмотрим теперь наиболее важные аналитические результаты, характеризующие решения уравнения Кортевега — де Вриза  $u(x, t)$ . Напишем начальное условие в виде

$$u(x, 0) = u_0 \varphi \left( \frac{x}{\Delta} \right), \quad (3,30)$$

где  $u_0$  и  $\Delta$  — характерные амплитуда и ширина начального возмущения, а  $\varphi(\xi)$  — безразмерная функция, описывающая его профиль (в этом разделе всюду будет предполагаться, что  $\varphi(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ ).

Переходя к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{x}{\Delta}, \quad \tau = \frac{tu_0}{\Delta}, \quad \eta(\xi, \tau) = \frac{u}{u_0}, \quad (3,31)$$

получаем уравнение Кортевега — де Вриза и начальное условие в виде

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = 0, \quad \eta(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad (3,32)$$

где

$$\sigma = \Delta \left( \frac{u_0}{\beta} \right)^{1/2}. \quad (3,33)$$

Из (3,32) следует, что решения с одинаковыми  $\sigma$  и  $\varphi(\xi)$  должны быть подобны между собой. В частности, число солитонов, образующихся в ре-

зультате эволюции начального возмущения, отношения их амплитуд и т. д. однозначно определяются величиной  $\sigma$  и формой начального профиля, характеризующейся функцией  $\varphi(\xi)$ . Поэтому величину  $\sigma$  можно называть параметром подобия<sup>12</sup>.

Как показано в работе<sup>14</sup>, амплитуды солитонов, образующихся из начального возмущения, затухающего при  $x \rightarrow \pm\infty$ , определяются собственными значениями некоторой краевой задачи Штурма — Лиувилля (или, выражаясь языком квантовой механики, уровнями энергии в некоторой потенциальной яме). Остановимся на этом вопросе подробнее.

Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$\Psi_{\xi\xi}(\xi; \tau) + \frac{\sigma^2}{6} [E(\tau) + \eta(\xi, \tau)] \Psi(\xi; \tau) = 0, \quad (3,34)$$

где потенциал  $-\eta(\xi, \tau)$ , собственные значения  $E(\tau)$  и волновые функции  $\Psi(\xi; \tau)$  зависят от времени  $\tau$  как от параметра, причем эта зависимость определяется тем, что  $\eta(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению Кортевега — де Вриза в форме (3,32), при начальном условии  $\eta(\xi, 0) = \varphi(\xi)$ . (Роль величины  $2m/\hbar^2$  играет при этом  $\sigma^2/6$ .)

Рассматривая совместно уравнения (3,32) и (3,34), можно прежде всего доказать, что собственные значения уравнения (3,34) не зависят от времени, т. е.  $E(\tau) = E$ , где  $E$  — собственные значения уравнения

$$\Psi_{\xi\xi}''(\xi; 0) + \frac{i\sigma^2}{6} [E + \varphi(\xi)] \Psi(\xi; 0) = 0. \quad (3,35)$$

Оказывается, далее, что дискретный спектр уравнения (3,35) полностью определяет амплитуды, а следовательно, и скорости всех солитонов, которые образуются из начального возмущения, а именно, для амплитуд солитонов  $a_r$  ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) имеют место соотношения

$$a_r = -2u_0 E_r, \quad (3,36)$$

где  $E_r$  — собственные значения дискретного спектра.

Более того, зная асимптотическое поведение волновых функций  $\Psi(\xi; 0)$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  (как для дискретной, так и для непрерывной части спектра), можно определить также асимптотики волновых функций  $\Psi(\xi; \tau)$ , удовлетворяющих уравнению (3,34). Зная же асимптотическое поведение  $\Psi(\xi; \tau)$  при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ , можно, используя методы решения обратной задачи теории рассеяния<sup>17, 18</sup>, восстановить «потенциал» —  $\eta(\xi, \tau)$  уравнения (3,34) для любого  $\tau$ . Для этого необходимо решить некоторое, уже линейное, интегральное уравнение, которое приведено в работе<sup>14</sup>. К сожалению, последнее имеет довольно сложный вид и точное его решение при любых  $\tau$ , вообще говоря, неизвестно. Поэтому, например, описанный метод наталкивается на большие трудности при попытках с его помощью исследовать характер «хвостов» и т. п.

Тем не менее уже из формулы (3,36) можно извлечь весьма ценную информацию относительно солитонов, образующихся (при достаточно больших  $\tau$ ) из начального возмущения.

В частности, если  $\varphi(\xi) \leq 0$  при всех  $\xi$ , то солитоны не могут возникнуть, каково бы ни было  $\sigma$ . Если же начальное возмущение  $\varphi(\xi)$  знакопеременно, то солитоны появляются только при достаточно большом  $\sigma$ .

Наконец, если  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi > 0$ , то уравнение Шрёдингера всегда имеет дискретный спектр, т. е. из начального возмущения с положительной площадью профиля образуется по крайней мере один солитон\*). В последнем

\*) Эти результаты были получены ранее в<sup>19</sup> из других соображений.

случае (при достаточно малых значениях  $\sigma$ ) собственное значение уравнения Шрёдингера может быть найдено по теории возмущений:

$$E \approx -\frac{\sigma^2}{24} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right]^2$$

(см., например, <sup>20</sup>, § 45). Соответственно, амплитуда солитона приближенно равна

$$a \approx \frac{u_0 \sigma^2}{12} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right]^2. \quad (3,37)$$

Условие применимости теории возмущений имеет при этом вид

$$\sigma^2 \ll \sigma_c^2, \quad (3,38)$$

где  $\sigma_c = \sqrt{12}$  — значение параметра подобия для солитона.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\sigma \gg 1$  и число  $N$  образовавшихся солитонов велико. В этом случае их можно характеризовать функцией распределения  $F(a)$ , определяющей число солитонов  $dN$ , имеющих амплитуды в интервале  $(a, a + da)$ :

$$dN = F(a) da. \quad (3,39)$$

Функцию  $F(a)$  нетрудно получить, вычисляя плотность уровней в потенциальной яме по методу ВКБ. В результате получим \*)

$$F(a) = \frac{\sigma}{4\pi} \left( \frac{1}{3u_0} \right)^{1/2} \int_M \frac{d\xi}{\sqrt{2u_0\varphi(\xi) - a}}, \quad (3,40)$$

где область интегрирования  $M$  содержит те значения  $\xi$ , где

$$2u_0\varphi(\xi) > a. \quad (3,41)$$

Из (3,40), в частности, следует, что амплитуды солитонов не превышают удвоенного максимума начального возмущения:

$$F(a) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{a}{2} > \max(u_0\varphi(\xi)). \quad (3,42)$$

Интегрируя (3,40), получаем асимптотическое выражение для полного числа солитонов <sup>21</sup>:

$$N = \int_0^{\infty} F(a) da = \frac{\sigma}{\pi\sqrt{6}} \int_{\varphi(\xi) > 0} \sqrt{\varphi(\xi)} d\xi \quad (3,43)$$

(область интегрирования содержит только те значения  $\xi$ , где  $\varphi(\xi) > 0$ ). Таким образом, при больших  $\sigma$  число солитонов определяется только той областью, где начальное возмущение положительно.

Приведем еще несколько асимптотических соотношений, позволяющих сравнивать относительную роль солитонов и «хвостов» при больших  $\sigma$  \*\*). Обозначая асимптотическое значение инвариантов для солитонов

\*) Формула (3,40) была впервые получена в <sup>15</sup>, исходя из законов сохранения (в несколько другой форме: вводя в (3,40) новую переменную интегрирования  $z = \varphi(\xi)$ , получим выражение (6) работы <sup>15</sup>).

\*\*\*) Хотя «хвост» и расплывается с течением времени, его вклады в импульс, энергию и другие инварианты  $I_m = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m[u] dx$  остаются постоянными (после того как солитоны от него «оторвались»). Таким образом, возникает вопрос об относительной величине этих вкладов.



и «хвостов» (при  $\sigma \gg 1$ ) через  $I_m^{(s)}, I_m^{(l)}$ , соответственно можно получить <sup>21</sup>

$$\left. \begin{aligned} I_m^{(s)} &= \frac{1}{m} \int_{u(x,0) > 0} dx u^m(x, 0), \\ I_m^{(l)} &= \frac{1}{m} \int_{u(x,0) < 0} dx u^m(x, 0). \end{aligned} \right\} \quad (3,44)$$

Таким образом, аналитические значения инвариантов для «хвостов»  $I_m^{(l)}$  определяются только теми областями, где начальное возмущение отрицательно. Если  $u(x, 0) \geq 0$  при всех значениях  $x$ , то из (3,44) следует, что  $I_m^{(l)} = 0$ , так что в этом случае можно говорить (с асимптотической точностью при больших  $\sigma$ ), что возмущение полностью распадается на солитоны. Результаты численных расчетов, проведенных в работах <sup>12,22,23</sup>,

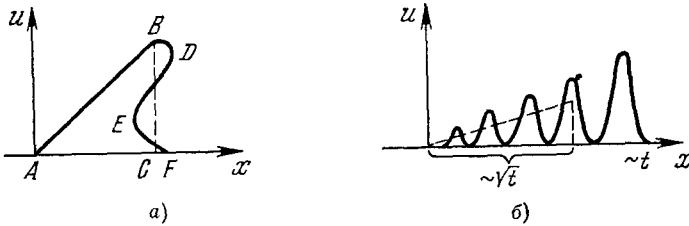


Рис. 6.

показывают, что этот результат, а также формула (3,43) имеют в ряде случаев довольно большую точность при сравнительно небольших значениях  $\sigma$ .

Наконец, остановимся еще на одном аспекте изложенных в этом параграфе результатов <sup>22</sup>. Поскольку из определения числа  $\sigma$  (3,33) вытекает, что предельный случай  $\sigma \gg 1$  может реализоваться при конечных  $u_0, \Delta$  и малых  $\beta$ , то полученные выше формулы определяют асимптотическое решение уравнения Кортевега — де Вриза при малых значениях параметра  $\beta$ .

Рассмотрим это решение при условии  $\varphi(\xi) \geq 0$  и сравним его с решением уравнения для простой волны в гидродинамике  $u_t + uu_x = 0$  при тех же начальных условиях, а также с асимптотическим решением уравнения Бюргерса (2,12) при  $\mu \rightarrow 0$  (последнее имеет треугольный профиль с ударной волной на фронте).

Решение уравнения  $u_t + uu_x = 0$  при достаточно больших  $t$  изображается кривой  $ABDEF$  на рис. 6, а, а решение уравнения Бюргерса — кривой  $ABC$ . При одинаковых начальных условиях площади этих кривых равны, поскольку из уравнения  $u_t + uu_x = 0$  и уравнения Бюргерса вытекает сохранение импульса.

Решение уравнения Кортевега — де Вриза при  $\beta \rightarrow 0$  и  $\varphi(\xi) \geq 0$  состоит, согласно сказанному выше, из ряда солитонов, число которых растет как  $\beta^{-1/2}$ , а ширина убывает как  $\beta^{1/2}$ . Это решение изображено на рис. 6, б.

При  $\beta \rightarrow 0$  инварианты уравнения Кортевега — де Вриза принимают согласно (3,29) вид

$$I_m = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} u^m(x, t) dx \quad (3,45)$$

и, следовательно, совпадают с инвариантами уравнения  $u_t + uu_x = 0$ , которое имеет бесконечное число законов сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^m}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^{m+1}}{m+1} \right) = 0. \quad (3,46)$$

Таким образом, при одних и тех же начальных условиях профиль  $ABDEF$  и профиль, изображенный на рис. 6, б, имеют в предельном случае  $\beta \rightarrow 0$  не только одинаковые площади, но и другие инварианты вида (3,45).

### 3.9. Ударные волны в диспергирующих средах

Выше мы предполагали, что диссипативные процессы отсутствуют, т. е. их роль существенно меньше, чем роль дисперсии. Если имеется какая-либо диссипация, например, вязкость, то все обсуждавшиеся

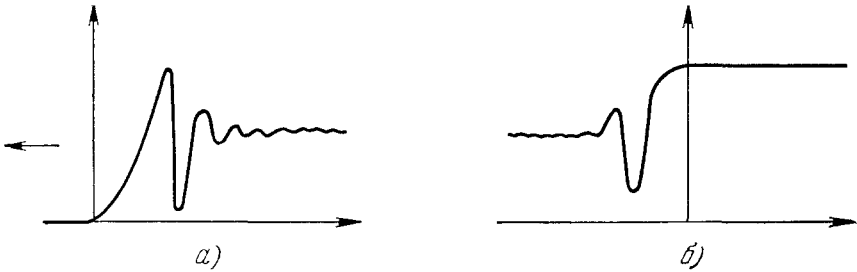


Рис. 7.

выше волны будут слабо затухающими, а в уравнении Кортевега — де Вриза появится слагаемое со второй производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3,47)$$

(это уравнение можно называть уравнением Кортевега — де Вриза — Бюргера).

Рассмотрим опять бегущую стационарную волну вида  $u = u(x - ct)$ . Для такой волны уравнение (3,47) можно проинтегрировать один раз по  $x$ :

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} = -cu + \frac{u^2}{2} = -\frac{\partial W}{\partial u}. \quad (3,48)$$

Отсюда видно, что мы снова получаем уравнение для нелинейного осциллятора, но на этот раз с затуханием. Соответственно, колебания эквивалентного осциллятора с потенциалом  $W(u)$  будут затухающими; поэтому вместо периодической волны возникает несимметричный цуг волн (рис. 7, а). Как мы видим, после прохождения такого цуга состояние среды меняется — за цугом вещество движется с некоторой скоростью  $u_0$ . Это значит, что мы получаем скачок — ударную волну, но с осциллирующей структурой<sup>24, 25</sup>. При малой вязкости первые волны этой структуры близки к солитонам, а если вязкость велика по сравнению с дисперсией, то мы приходим к обычной ударной волне с монотонным возрастанием  $u$  от нуля до  $u_0$  \*).

\*) Критическое значение параметра  $\mu$ , при котором происходит переход от осцилляторной к монотонной структуре ударной волны, определяется выражением  $\mu = \sqrt{4\beta c}$ .

Поскольку минимум потенциала  $W$  достигается при  $u = 2c$ , то разность предельных значений  $u(\infty) = 0$ ,  $u(-\infty) = 2c$  оказывается связанной со скоростью волны соотношением

$$c = \frac{\Delta u}{2}, \quad (3,49)$$

где  $\Delta u = u(-\infty) - u(\infty)$ . Сравнивая это выражение с (2,18), мы видим, что  $c$  совпадает со скоростью ударной волны без дисперсии. В системе координат, где среда покоится, скорость ударной волны равна  $(c_0 + \Delta u)/2$ , а соответствующее число Маха равно

$$M = 1 + \frac{\Delta u}{2c_0}. \quad (3,50)$$

Картина эта относится и к средам с отрицательной дисперсией, когда самый большой солитон бежит с максимальной скоростью, а осциллирующий «хвост» остается сзади фронта. В средах с положительной дисперсией, наоборот, осциллирующая структура находится перед фронтом волны, как показано на рис. 7, б. Оба типа ударных волн наблюдались экспериментально в плазме (см., например, <sup>26</sup>), а также в нелинейных линиях передачи (электромагнитные ударные волны) <sup>25</sup>.

#### 4. САМОФОКУСИРОВКА И САМОСЖАТИЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

##### 4.1. Самофокусировка

Выше мы довольно подробно ознакомились с нелинейными волнами в диспергирующих средах, но при этом все время ограничивались одномерным случаем, когда все величины зависели только от одной координаты  $x$  и времени  $t$ . Чтобы получить более полное представление о динамике нелинейных волновых процессов, следует отказаться от ограничения одномерностью и перейти к общему случаю трехмерных или по крайней мере двумерных волн. Но прежде, чем переходить к достаточно сложному общему случаю, мы рассмотрим более простой класс задач, когда волны слабо отличаются от одномерных, т. е. когда мы имеем дело с волной, амплитуда и фаза которой медленно меняются в пространстве и во времени. При этом мы встречаемся с двумя чрезвычайно интересными нелинейными процессами — самофокусировкой и самосжатием волновых пакетов. Рассмотрим сначала самофокусировку.

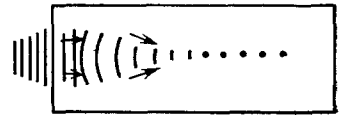


Рис. 8.

Явление самофокусировки было предсказано Аскарьяном <sup>27</sup> из весьма простых соображений. Допустим, что в оптически прозрачной среде распространяется мощный луч лазера. За счет целого ряда эффектов (нелинейной поляризуемости, электрострикции, разогрева и т. п.) такой луч немного изменяет показатель преломления среды. Если это изменение положительно, т. е. среда становится оптически более плотной, то луч создает сам себе нечто вроде линзы, которая будет его фокусировать. Другими словами, центральная часть волнового фронта несколько отстает от периферических, и волна становится сходящейся (рис. 8).

Эти рассуждения, совершенно прозрачные по своей физике, могут показаться все же недостаточно обоснованными, если учесть, что самофокусировка представляет собой нелинейный и притом довольно медленный процесс, и поэтому возникает вопрос, не проявляются ли раньше более сильные эффекты нелинейного опрокидывания волн (на языке оптики — умножение частот). Но, как показывает рассмотрение предыдущей

главы, дисперсия легко предотвращает опрокидывание волн. Поэтому при наличии даже небольшой дисперсии сильного насыщения высокими гармониками может и не происходить, если амплитуда волны не очень велика. Впрочем, даже при достаточно большой амплитуде качественные соображения о самофокусировке сохраняют силу, если устанавливается определенная почти-периодическая волна по  $x$  и имеет место равновесие гармоник при «соревновании» между дисперсией и нелинейным опрокидыванием. В частности, эффекты самофокусировки проявляются даже в предельном случае одного-единственного солитона<sup>28</sup>. Рассмотрим, например,



Рис. 9.

солитон рис. 9, а, амплитуда которого меняется с  $y$  (плотность штриховки на рис. 9, а отвечает высоте солитона). В среде с отрицательной дисперсией участки с большей амплитудой движутся быстрее и солитон искривляется, как показано на рис. 9, б. Вследствие искривления возникает эффект фокусировки, и амплитуда центральной части начинает возрастать. Это приводит к восстановлению формы солитона, но с передвинувшимися по  $y$  областями повышенной амплитуды. Отсюда видно, что солитон в среде с отрицательной дисперсией не испытывает самофокусировки — он колеблется как натянутая струна. Однако при положительной дисперсии ситуация изменяется: участки с повышенной амплитудой несколько отстают и к ним за счет искривления устремляются новые порции возмущения; в результате солитон сжимается в компактное образование и по оси  $y$ .

лению формы солитона, но с передвинувшимися по  $y$  областями повышенной амплитуды. Отсюда видно, что солитон в среде с отрицательной дисперсией не испытывает самофокусировки — он колеблется как натянутая струна. Однако при положительной дисперсии ситуация изменяется: участки с повышенной амплитудой несколько отстают и к ним за счет искривления устремляются новые порции возмущения; в результате солитон сжимается в компактное образование и по оси  $y$ .

#### 4.2. Самосжатие волнового пакета

Явление сжатия нелинейной волны может происходить не только в поперечном, но и в продольном направлении по отношению к направлению распространения волны. Чтобы выявить соответствующий эффект, рассмотрим плоский волновой пакет с медленно меняющейся амплитудой и фазой. Будем считать, что амплитуда волны невелика, так что она не сильно отличается от синусоидальной, т. е. что высшие гармоники, находящиеся в равновесии с основной, малы. Тогда волну можно характеризовать волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$  основной гармоники. В этом случае основным усредненным нелинейным эффектом является зависимость фазовой скорости или частоты от амплитуды  $a$ ; поэтому при малой амплитуде, когда достаточно ограничиться лишь первой исчезающей поправкой,

$$\omega(k, a) = \omega_0(k) + \alpha a^2, \quad (4,1)$$

где  $\omega_0(k)$  отвечает частоте линейной волны, а второе слагаемое — нелинейной поправке. Если  $k$  и  $a^2$  изменяются по  $x$ , то фаза  $\varphi(x, t)$ , которая для монохроматической волны имеет вид  $\varphi = kx - \omega t$ , теперь уже не будет линейной функцией  $x$  и  $t$ ; однако по-прежнему можно считать, что

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4,2)$$

Из (4,2) видно, что волновое число будет изменяться со временем согласно уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v_g \frac{\partial k}{\partial x} - \alpha \frac{\partial a^2}{\partial x}, \quad (4,3)$$

где мы учли выражение (4,1) для частоты и обозначили через  $v_g$  групповую скорость:  $v_g = \frac{\partial \omega_0}{\partial k}$ . Учтем теперь, что в волновом пакете энергия — квадратичная по амплитуде величина — переносится (в рассматриваемом приближении по  $a$ ) с групповой скоростью. Тогда в качестве закона сохранения энергии можно принять уравнение

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_g a^2) = 0. \quad (4,4)$$

Из уравнений (4,3), (4,4) следует, что при определенных условиях плоская волна оказывается неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты. В самом деле, допустим, что на монохроматическую волну с волновым числом  $k_0$  и амплитудой  $a_0$  наложено малое возмущение:

$$k = k_0 + k' \exp(-i\nu t + i\kappa x), \quad a = a_0 + a' \exp(-i\nu t + i\kappa x),$$

где  $\nu \ll \omega$ ,  $\kappa \ll k_0$  — частота и волновое число модуляции. Тогда в линейном приближении из (4,3), (4,4) получим дисперсионное соотношение

$$\nu = v_g \kappa \pm \sqrt{\alpha v_g' a_0^2} \kappa, \quad (4,5)$$

где  $v_g' = \frac{\partial v_g}{\partial k}$ . Как мы видим, при  $\alpha v_g' < 0$  имеет место неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и самосжатия волновых пакетов. Этот результат был получен впервые Лайтхиллом<sup>29а</sup>.

Физика неустойчивости пояснена на рис. 10. Допустим, что  $\alpha > 0$ . Тогда в точках  $A$ ,  $A'$  фазовая скорость волны больше, чем в точке  $B$ , и на участке  $a$  волновое число, пропорциональное числу узлов на единице длины, будет возрастать, а на участке  $b$  — убывать со временем. Вследствие этого при  $v_g' < 0$  волновой пакет в области  $a$  будет отставать и усиливать амплитуду в точке  $A$ , а в области  $b$  он будет забегать вперед и усиливать волну в точке  $A'$ .

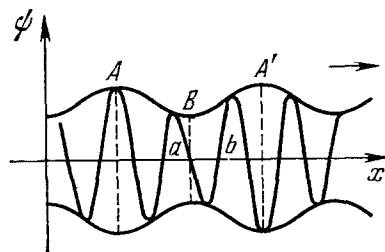


Рис. 10.

Интересным примером неустойчивых нелинейных волн являются гравитационные волны Стокса на поверхности жидкости, глубина которой значительно больше длины волны. В этом случае дисперсионное уравнение линейного приближения имеет вид  $\omega = \sqrt{gk}$  (см., например<sup>3,30</sup>). Для стационарной волны конечной (но малой) амплитуды получается следующее нелинейное дисперсионное уравнение<sup>30</sup>:

$$\omega(k, a^2) = \sqrt{gk} \left( 1 + \frac{a^2 k^2}{2} + \dots \right), \quad (4,6)$$

где  $a$  — амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости. Из (4,6) следует, что

$$\alpha v_g' = -\frac{gk}{8} < 0. \quad (4,7)$$

Таким образом, гравитационные волны на поверхности «глубокой» воды неустойчивы относительно продольных возмущений<sup>29а</sup>). Из приведенных ниже формул видно, что волны устойчивы относительно поперечных возмущений (т. е. не самофокусируются).

В свое время вывод о неустойчивости периодических гравитационных волн на воде произвел сенсацию в гидродинамике и казался неправдопо-

добным. Но затем он был получен заново различными методами и был подтвержден экспериментально<sup>31,32</sup>. Теперь уже никто не сомневается в неустойчивости гравитационных волн на глубокой воде, и, значит, поверье «девятого вала» имеет под собой определенные физические основания.

### 4.3. Параболическое уравнение

Как самофокусировка, так и самосжатие волновых пакетов, и притом с учетом дифракции, могут быть описаны с помощью параболического уравнения<sup>33-36</sup>. Представим себе, что мы имеем почти плоскую волну с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  и частотой  $\omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0)$ . В линейном приближении систему уравнений для малых отклонений от положения равновесия после выражения одних величин через другие можно представить в виде одного линейного уравнения для комплексной амплитуды  $\psi$ :  $D(\omega, \mathbf{k})\psi_{\mathbf{k}\omega} = 0$ . В частности, решением дисперсионного уравнения  $D(\omega, \mathbf{k}) = 0$  являются выбранные нами  $\omega_0, \mathbf{k}_0$ . Вблизи этих значений, ограничиваясь линейными по  $\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$  членами, уравнение для фурье-гармоники  $\psi_{\mathbf{k}\omega}$  можно представить в виде  $A(\mathbf{k}_0, \omega_0)[\omega - \omega(\mathbf{k})]\psi_{\mathbf{k}\omega} = 0$ , где  $A = \text{const}$  можно опустить, а  $\omega(\mathbf{k})$  есть решение дисперсионного уравнения. Разложим  $\omega(\mathbf{k})$  вблизи  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ :

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{k}) &\approx \omega(\mathbf{k}_0) + v_g \left( \sqrt{(k_0 + \kappa_x)^2 + \kappa_\perp^2} - k_0 \right) + \frac{1}{2} v'_g \kappa_x^2 \approx \\ &\approx \omega(k_0) + v_g \left( \kappa_x + \frac{\kappa_\perp^2}{2k_0} \right) + \frac{1}{2} v'_g \kappa_x^2,\end{aligned}$$

где  $\kappa = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$  — малое отклонение от волнового вектора  $\mathbf{k}_0$  ( $k_0 = k_{0x}$ ). Если подставить это выражение в уравнение  $[\omega - \omega(\mathbf{k})]\psi_{\mathbf{k}\omega} = 0$  и перейти от Фурье-гармоник к переменным  $\mathbf{r}, t$ , то с учетом  $\omega - \omega_0 = i \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\kappa = -i\nabla$  мы получим параболическое уравнение для  $\psi$ . С включенной нелинейной добавкой к частоте (4,1) это уравнение имеет вид

$$i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + v_g \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} v'_g \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{v_g}{k_0} \Delta_\perp \psi - \alpha |\psi|^2 \psi = 0, \quad (4,8)$$

где  $v'_g = \frac{\partial v_g}{\partial k_0}$ .

Уравнение (4,8) можно привести к другой, часто используемой форме, если подставить в (4,8)  $\psi = ae^{i\varphi}$  ( $a$  — амплитуда, а  $\varphi$  — добавка к фазе волны, которые предполагаются вещественными) и затем отделить действительную и мнимую части. Тогда получим следующую систему:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_g \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} v'_g \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{v_g}{k_0} (\nabla_\perp \varphi)^2 + \alpha a^2 - \frac{v'_g}{2a} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{v_g}{2k_0 a} \Delta_\perp a = 0, \\ \frac{\partial a^2}{\partial t} + v_g \frac{\partial a^2}{\partial x} + v'_g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} a^2 \right) + \frac{v_g}{k_0} \nabla_\perp (a^2 \nabla_\perp \varphi) = 0.\end{aligned} \quad (4,9)$$

Существенно, что коэффициенты уравнения (4,8) (а также системы (4,9)) полностью определяются нелинейным дисперсионным уравнением (4,1). Поэтому волны различной природы можно рассматривать с единой точки зрения. В частности, для электромагнитного поля в нелинейной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon_0(\omega)(1 + \beta|E|^2)$  уравнение для комплексной амплитуды электрического поля  $E(\mathbf{r}, t)$  принимает вид

$$2i(E_t + v_g E_x) - k_{\omega\omega} v_g^3 E_{xx} + \frac{v_g}{k_0} \Delta_\perp E + 2v_g k_0 \beta |E|^2 E = 0. \quad (4,10)$$

При  $E_t = 0$  это уравнение описывает дифракцию стационарного светового пучка с учетом нелинейных эффектов. Если пренебречь нелинейным членом

и членом с  $E_{xx}$  (который имеет порядок отношения длины волны к ширине пучка), то получится так называемое параболическое уравнение приближенной теории дифракции<sup>33</sup>. В связи с этим уравнение (4,8) принято называть нелинейным параболическим уравнением. Уравнение (4,10) исследовалось в ряде работ в связи с явлением самовоздействия света (см., например, обзоры<sup>35, 36</sup>). Полученные при этом результаты, как видно из сказанного выше, можно распространить и на другие типы волн, которые описываются более общим уравнением (4,8).

Рассмотрим снова задачу о неустойчивости плоской волны:  $\psi_0 = a_0 \exp(-iv_0 t)$ , где  $a_0$  — начальная амплитуда, а  $v_0$  — нелинейная добавка к частоте, которая согласно (4,8) равна  $v_0 = \alpha a_0^2$ . Предположим, что волна  $\psi_0$  несколько возмущается, так что ее амплитуда  $a$  и фаза  $\varphi$  слабо изменяются в пространстве и со временем:  $a = a_0 + a'$ ,  $\varphi = v_0 t + \varphi'$ . Малые величины  $a'$  и  $\varphi'$  следует считать действительными. После подстановки этого выражения в (4,9) и отбрасывания квадратичных по  $a'$ ,  $\varphi'$  членов мы получим систему уравнений для  $a'$ ,  $\varphi'$ :

$$a_0 \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + v_g \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) + \hat{\mathcal{L}} a' + 2\alpha a_0^2 a' = 0, \quad (4,11)$$

$$\frac{\partial a'}{\partial t} + v_g \frac{\partial a'}{\partial x} - a_0 \hat{\mathcal{L}} \varphi' = 0, \quad (4,12)$$

где  $\hat{\mathcal{L}}$  — оператор, равный  $\hat{\mathcal{L}} = -\frac{v_g}{2k_0} \Delta_{\perp} - \frac{1}{2} v_g' \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Уравнения (4,11), (4,12) являются линейными, и поэтому их решение можно искать в виде, пропорциональном  $\exp(-ivt + i\mathbf{kr})$ . При этом  $\hat{\mathcal{L}}$  можно считать равным числу  $L = \frac{v_g}{2k_0} \kappa_{\perp}^2 + \frac{1}{2} v_g' \kappa_x^2$ , и, как условие разрешимости (4,11), (4,12), получаем следующее выражение для частоты:

$$\nu = v_g \kappa_x \pm \sqrt{L(2\alpha a_0^2 + L)}. \quad (4,13)$$

Если  $\kappa_{\perp} = 0$  и  $\kappa_x^2$  мало, то мы получаем отсюда прежний результат (4,5), т. е. неустойчивость по отношению к самосжатию при  $\alpha v_g' < 0$ . Как видно из (4,13), вывод о самосжатии при  $\alpha v_g' < 0$  справедлив только при достаточно малых  $\kappa_x^2$ . Если  $\kappa_x^2 > 4\alpha a_0^2 / v_g'$ , то неустойчивость по отношению к самосжатию стабилизируется дифракционным распылением волнового пакета. В другом предельном случае  $\kappa_x = 0$  из (4,13) следует самофокусировка, если  $\alpha < 0$ . Самофокусировка также начинается только с достаточно малых  $\kappa_{\perp}$ , а именно  $\kappa_{\perp}^2 < 4\alpha a_0^2 k_0 / v_g$ . Поскольку минимально возможное значение  $\kappa_{\perp}$  порядка обратного радиуса цилиндрического пучка  $R$ , то отсюда следует, что в рассматриваемом приближении, когда учтена только квадратичная по амплитуде поправка к частоте (4,1), самофокусировка начинается лишь при достаточно большой мощности волнового пучка, пропорциональной  $a_0^2 R^2$ .

Стабилизирующая роль дифракции приводит к возможности существования стационарных сфокусированных пучков или самосжатых волновых пакетов. В самом деле, рассмотрим, например, случай  $\alpha v_g' < 0$  и допустим, что зависимость от  $y$  и  $z$  отсутствует. Рассмотрим решение типа бегущего пакета  $\psi = e^{-iv_0 t} u(x - v_g t)$ . Для функции  $u$  из (4,8) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2\alpha}{v_g'} u^3 - \frac{2v_0}{v_g'} u. \quad (4,14)$$

С уравнением такого типа мы уже встречались при рассмотрении периодических решений уравнения Кортевега — де Вриза. Мы опять можем рассматривать (4,14) как уравнение для нелинейного осциллятора

с потенциальной энергией  $W(u) = -\frac{\alpha}{2v_g'} u^4 + \frac{v_0}{v_g'} u^2$ . При  $\alpha v_g' < 0$  и  $v_0 v_g' < 0$  потенциал  $W(u)$  имеет яму, так что возможны как периодические волны огибающей, так и локализованные пакеты типа солитонов.

Уравнение последних имеет вид <sup>34</sup>

$$a = A \operatorname{sech} \left[ A \left( -\frac{\alpha}{v_g'} \right)^{1/2} (x - u_0 t) \right], \quad v_0 = \alpha A^2 / 2. \quad (4,15)$$

Аналогичным образом, для случая самофокусировки можно найти локализованные в поперечном направлении решения, если  $\alpha < 0$ . Эти решения соответствуют пучкам, которые сами по себе создают волновод и распространяются в виде узких нитей.

#### 4.4. Нелинейная геометрическая оптика

Результаты предыдущего раздела описывают лишь начальную стадию процессов модуляции и фокусировки. Исследование этих процессов при достаточно больших  $t$  сильно усложняется из-за сложного вида основных уравнений. Поэтому мы рассмотрим сначала упрощенную систему уравнений, которая получается из (4,9), если пренебречь в первом из уравнений (4,9) членами, содержащими вторые производные по амплитуде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_g \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} v_g' \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{v_g}{2k_0} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 + \alpha a^2 = 0, \quad (4,16)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + v_g \frac{\partial a^2}{\partial x} + v_g' \frac{\partial}{\partial x} \left( a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{v_g}{2k_0} \Delta_{\perp}^2 (a^2 \nabla_{\perp} \varphi) = 0. \quad (4,17)$$

Заметим, что эти уравнения можно получить также из трехмерного аналога уравнений (4,2), (4,3):

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (v_g a^2) = 0, \quad (4,18)$$

если положить в них

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}, \quad \omega = \omega_0 - \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4,19)$$

(где «невозмущенный» волновой вектор  $\mathbf{k}_0$  предполагается направленным вдоль оси  $x$ ) и ограничиться квадратичными членами по  $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = \nabla \varphi$ ). Поскольку уравнения (4,18) соответствуют приближению геометрической оптики, то и систему (4,16), (4,17) можно называть основными уравнениями нелинейной «геометрической оптики» для волн небольшой амплитуды, когда локальный профиль волны определяется одной гармоникой. Эта система уравнений описывает процессы нелинейного самовоздействия «быстро осциллирующих» волн, характеризующихся тем, что изменения амплитуды, длины волны и других параметров являются достаточно малыми на расстояниях порядка длины волны и за время, сравнимое с периодом колебаний. Наиболее общий подход к нелинейным волновым процессам в этом предельном случае был развит в работах Уитэма <sup>37, 38</sup>, который разработал общий метод, позволяющий получать уравнения для медленно изменяющихся параметров в приближении, которое может быть названо «адиабатическим». Рассмотренное здесь приближение соответствует в формализме Уитэма волнам небольшой амплитуды.

Рассмотрим теперь нелинейную эволюцию огибающей волны, имевшей до наложения возмущения амплитуду  $a_0$ . При этом удобно несколько переопределить фазу:  $\varphi \rightarrow \varphi - \alpha a_0^2 t$ , чтобы в уравнении (4,16) последний нелинейный член заменился на  $\alpha (a^2 - a_0^2)$ . Рассмотрим одномерный



случай, когда все величины зависят только от  $x$  и  $t$ , и перейдем к новым переменным \*)

$$\xi = x - v_g t, \quad \tau = v_g' t. \quad (4,20)$$

Как мы видим,  $\xi$  имеет смысл координаты в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью. В этих переменных уравнения (4,16), (4,17) с переопределенной фазой принимают вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\alpha}{v_g'} (a^2 - a_0^2) = 0, \quad (4,21)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (4,22)$$

совпадающий по форме с уравнениями гидродинамики. При этом  $\varphi(\xi, t)$  играет роль потенциала скоростей,  $a^2$  — роль плотности («показатель адиабаты»  $\gamma = 2$ ). Соответственно, квадрат скорости «звука» равен

$$c_0^2 = \frac{\alpha a_0^2}{v_g'}. \quad (4,23)$$

Как мы видим, неустойчивой волне соответствует  $c_0^2 < 0$ , т. е. «отрицательная сжимаемость».

Рассмотрим сначала случай, когда нелинейная стационарная волна устойчива, т. е. квадрат скорости распространения модуляционных колебаний (4,23) положителен. В этом случае простейшие нелинейные решения уравнений (4,21), (4,22) — это «простые волны» модуляционных возмущений, распространяющиеся на фоне бесконечной стационарной волны с параметрами  $a_0, k_0, \omega_0 = \omega(k_0, a_0^2)$ . Поступая так же, как и в обычной газодинамике, нетрудно получить следующее уравнение для простой волны, распространяющейся в положительном направлении \*\*):

$$\frac{\partial a}{\partial t} + c_0 \left( 1 + 3 \frac{a - a_0}{a_0} \right) \frac{\partial a}{\partial \xi} = 0, \quad (4,24)$$

где величина  $c_0$  определена в (4,23). Из (4,24) вытекает, что в системе отсчета, где среда покоится, точка, где амплитуда волны равна какому-нибудь фиксированному значению  $a$ , перемещается со скоростью

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_a = v_g + v_g' c_0 \left( 1 + 3 \frac{a - a_0}{a_0} \right) \quad (4,25)$$

(мы перешли к исходным переменным  $x, t$  в соответствии с (4,20)). Из (4,25) видно, что чем больше значение  $a$ , тем больше скорость точки профиля возмущения, отвечающей этому значению амплитуды. В результате профиль возмущения будет укрущаться до тех пор, пока не возникнет разрыв амплитуды и соответственно волнового числа  $k = k_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ . Разумеется, здесь приближение нелинейной геометрической оптики теряет силу, так как градиенты амплитуды и волнового числа вблизи точки опрокидывания становятся большими. Поэтому дальнейший анализ эволюции возмущений может быть проведен на основе более точной теории, выходящей за пределы геометрической оптики (см. ниже).

Более общие нелинейные решения уравнений (4,21), (4,22), не сводящиеся к простым волнам, можно получить, как и в гидродинамике,

\*) Заметим, что в переменных (4,20) уравнение (4,8) принимает вид уравнения Гинзбурга — Ландау в теории сверхпроводимости <sup>39</sup>, а рассматриваемые здесь случаи устойчивых и неустойчивых плоских волн отвечают состояниям ниже и выше температуры перехода.

\*\*) Напомним, что это уравнение относится к системе, движущейся с групповой скоростью  $v_g$  относительно среды.

с помощью преобразования «годографа», взяв в качестве независимых переменных  $a$  и  $\kappa \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ ; величины  $\xi$ ,  $\tau$  должны быть при этом определены как функции  $a$ ,  $\kappa$ . Соответствующее преобразование было проделано впервые Лайтхиллом<sup>29</sup>. Вводя вместо фазы  $\varphi$  ( $\xi$ ,  $\tau$ ), фигурирующей в уравнениях (4,21), (4,22), новую функцию

$$\Phi = \kappa \xi - \left[ \frac{\kappa^2}{2} + \frac{\alpha}{v_g'} (a^2 - a_0^2) \right] \tau - \varphi(\xi, \tau) \quad (4,26)$$

(где предполагается, что величины  $\xi$  и  $\tau$  есть некоторые функции от  $a$ ,  $\kappa$ ), можно получить

$$\tau = -\frac{v_g'}{2\alpha a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)_\kappa, \quad \xi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \right)_a - \frac{\kappa v_g'}{2\alpha a} \frac{\partial \Phi}{\partial a}, \quad (4,27)$$

причем функция  $\Phi(a, \kappa)$  удовлетворяет следующему линейному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{4\alpha}{v_g'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \kappa^2} = 0. \quad (4,28)$$

При  $\frac{\alpha}{v_g'} > 0$  (т. е. когда  $c_0^2 > 0$ ) (4,28) имеет вид осесимметричного волнового уравнения в цилиндрических координатах (роль «радиуса» играет  $a$ , «времени» —  $\kappa$ ).

Если заданы начальные условия

$$a = a_0(\xi), \quad \kappa = \kappa_0(\xi) \quad (\tau = 0), \quad (4,29)$$

то решение уравнения (4,28) нетрудно получить с помощью, например, общего метода Римана. Оно найдено и подробно исследовано в<sup>29</sup>. Это решение, как и основные уравнения геометрической оптики, теряет силу, когда начинается образование ударной волны вследствие нелинейного укручения профиля огibaющей.

В этой стадии начинают играть существенную роль последние два члена в первом из уравнений (4,9), которыми мы пренебрегали в приближении геометрической оптики. Учитывая члены с высшими производными, мы получаем в одномерном случае вместо (4,21) следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\alpha}{v_g'} (a^2 - a_0^2) - \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4,30)$$

Для выяснения эффектов, определяемых последним членом, рассмотрим сначала простой случай, когда в начальном возмущении величина  $a - a_0$  мала по сравнению с  $a_0$ . Для устойчивых волн ( $\alpha v_g' > 0$ ) эта величина не будет возрастать и в дальнейшем, так что в первом приближении последний член в уравнении (4,30) можно написать в виде  $\frac{1}{2a_0} \frac{\partial^2 a_0}{\partial \xi^2}$ . Тогда система уравнений (4,30), (4,22) приводится к уравнению Кортевега — де Вриза, которое в этом случае принимает вид (для возмущений, распространяющихся вправо)<sup>40</sup>

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + \left( c_0 + \frac{3}{2} \kappa \right) \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \kappa}{\partial \xi^3} = 0, \quad (4,31)$$

где

$$\kappa = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \beta = -\frac{1}{8c_0}, \quad c_0^2 = \frac{\alpha}{v_g'} a_0^2. \quad (4,32)$$

Поскольку параметр дисперсии  $\beta$  в этом случае отрицателен, возмущение распадается на ряд отрицательных солитонов и распространяющийся

вправо волновой пакет. Соотношение между пакетом и солитонами определяется начальным возмущением в соответствии с результатами раздела 3.8.

Общая качественная картина эволюции, намеченная выше, сохранится, разумеется, и в том случае, когда  $a - a_0 \sim a_0$ .

В частности, при любых  $a - a_0$  уравнениям (4,30), (4,22) удовлетворяют решения, описывающие стационарные волны огибающей (удлиненные и периодические). Такие решения нетрудно получить, подставляя в уравнения (4,30), (4,22) выражения вида

$$a^2 = \rho (\xi - V\tau), \quad \varphi = \varphi_1 (\xi - V\tau) + \text{const} \cdot \tau. \quad (4,33)$$

Выражения, описывающие солитон, имеют вид

$$\rho = \rho_0 - (\rho_0 - \rho_{\min}) \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\xi - V\tau}{l} \right), \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{V(\rho - \rho_0)}{\rho}, \quad (4,34)$$

$$l = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_{\min}} \right)^{1/2}, \quad V = c_0 \left( \frac{\rho_{\min}}{\rho_0} \right)^{1/2},$$

где  $\rho_{\min}$  — минимальное значение величины  $\rho$  в солитоне. Мы видим, в соответствии со сказанным выше, что солитон здесь представляет собой «яму», перемещающуюся со скоростью  $V$  на фоне стационарной волны с амплитудой  $a_0 = \rho_0^{1/2}$ . Разность фаз между точками, находящимися по обе стороны от солитона (формально между  $\xi = \infty$  и  $\xi = -\infty$ ) есть

$$\Delta\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) d\xi = -2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\rho_0 - \rho_{\min}}{\rho_{\min}} \right)^{1/2}. \quad (4,35)$$

Особый случай представляет солитон с  $\rho_{\min} = 0$ . В этом случае

$$\rho = \rho_0 [1 - \operatorname{sech}^2(\xi/l)], \quad V = 0, \quad (4,36)$$

$$l = \frac{1}{c_0} = \left( \frac{v_g}{\alpha\varphi_0} \right)^{1/2}, \quad (4,37)$$

$$\Delta\varphi = -\pi. \quad (4,38)$$

Мы видим, что такой солитон покоится относительно рассматриваемой волны (напомним, что все это относится к системе отсчета, движущейся с групповой скоростью стационарной волны  $v_g$ ).

Все эти результаты позволяют высказать следующие качественные соображения относительно модуляционных процессов в случае устойчивых волн ( $\alpha v_g' > 0$ ).

Если в начальный момент времени имеется некоторое, ограниченное в пространстве возмущение на фоне плоской волны, то при больших  $t$  оно превратится в два пуга волн, бегущих в противоположные стороны от области начального возмущения\*), как это изображено на рис. 11. При этом наиболее крупномасштабные из этих осцилляций могут иметь профили, близкие к солитонным (в области минимумов).

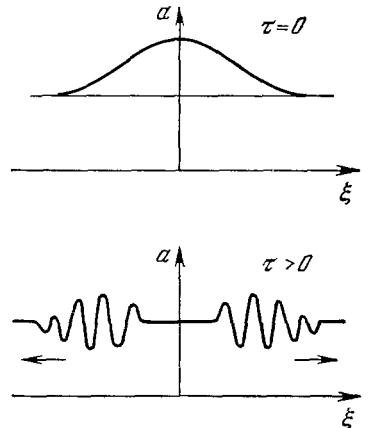


Рис. 11.

\*) В системе отсчета, движущейся со скоростью  $v_g$  относительно среды.

#### 4.5. Качественные особенности эволюции неустойчивых волн

Остановимся теперь на некоторых качественных особенностях эволюции модулированных волн при  $\alpha v'_g < 0$  (когда плоская волна «неустойчива» относительно малых возмущений).

В этом случае основные уравнения в приближении геометрической оптики становятся эллиптическими (скорость «звука» — мнимая). Полагая в (4,28)

$$r = \left( -\frac{4\alpha}{v'_g} \right)^{1/2} a, \quad (4,39)$$

получаем осесимметрическое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \kappa^2} = 0. \quad (4,40)$$

Аналитическое решение задачи Коши для этого уравнения можно получить тем же методом Римана, что и в случае (4,28) (вводя комплексные

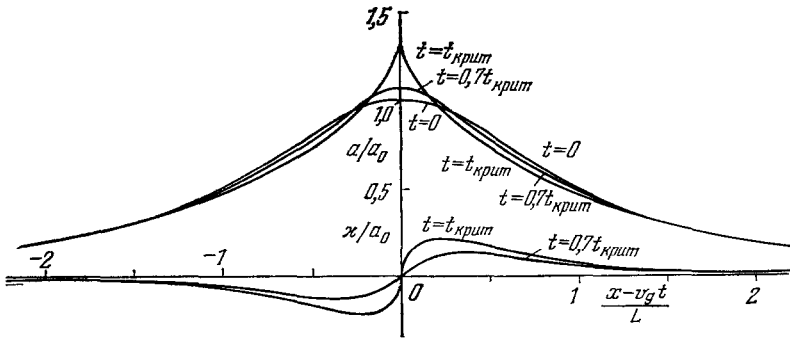


Рис. 12.

характеристики), что и было проделано Лайтхиллом. Отсылая за подробностями к его работам<sup>29</sup>, приведем здесь лишь некоторые результаты (см. также<sup>41</sup>). Пусть при  $t = 0$  имеется симметричный волновой пакет с волновым числом  $k_0$ , т. е.

$$\begin{aligned} a &= a_0 f(\xi^2/L^2), \quad \kappa = 0 \quad (t = 0), \\ f(0) &= 1, \quad f_\xi(z)_z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (4,41)$$

где  $f(z)$  — аналитическая функция,  $a_0$  — максимальная амплитуда,  $L$  — длина пакета. Тогда при возрастании  $t$  амплитуда остается непрерывной четной функцией  $\xi$ , а добавка к волновому числу  $\kappa(\xi, t)$  — нечетной, причем значение амплитуды в центре пакета  $a(0, t)$  растет с увеличением  $t$ . При некотором значении  $t = t_0$  производная  $(\partial a / \partial \xi)$  обращается в бесконечность:

$$\left( \frac{\partial a}{\partial \xi} \right)_{\xi=0, t=t_0} = \infty. \quad (4,42)$$

(сама же функция  $a(\xi, t)$  остается при этом, вообще говоря, непрерывной). Время  $t_0$  связано с параметрами пакета в начальный момент времени  $t = 0$  следующим образом:

$$t_0 = \frac{\text{const} \cdot L}{2 |\alpha v'_g|^{1/2} a_0}, \quad (4,43)$$

где const — безразмерная постоянная, не зависящая от  $a_0$  и  $L$ . В частности, для конкретного начального профиля волнового пакета

$$a = \frac{a_0}{1 + (\xi/L)^2} \quad (4,44)$$

Лайтхилл получил<sup>29</sup> const = 0,69. На рис. 12 приведены результаты Лайтхилла, характеризующие эволюцию пакета при возрастании  $t$  в случае (4,44) ( $t_0 = t_{\text{крит}}$ ).

Отметим еще, что для эллиптических уравнений задача Коши некорректна: малые изменения начальных условий приводят (вообще говоря, довольно быстро) к существенному изменению решения (что и выражается эффектом «неустойчивости», о котором шла речь выше).

Вблизи  $t = t_0$  рассматриваемая теория, основанная на геометрической оптике, становится неприменимой и надо пользоваться уравнением (4,30) вместо (4,21). При этом член со второй производной в уравнении (4,30) приводит к тому, что вместо острого пика в центре пакета появляются осцилляции профиля огибающей.

Качественное исследование развития этих осцилляций, проведенное в работе<sup>42</sup> и численное решение параболического уравнения (4,8), полученное в<sup>43</sup> для случая, когда начальный профиль огибающей имеет форму локального возмущения на фоне плоской волны, приводит к картине, изображенной на рис. 13 (в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью  $v_g$ ). В центральной области образуются осцилляции, которые распространяются по обе стороны от начального возмущения, так что ширина области при этом увеличивается и в результате волна распадается на волновые пакеты, амплитуды которых  $A$

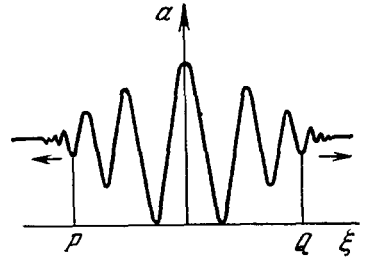


Рис. 13.

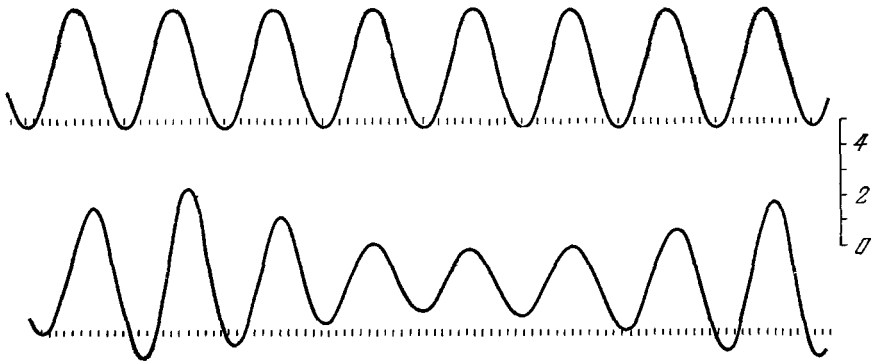


Рис. 14.

в полтора-два раза больше амплитуды  $a_0$  исходной волны, а форма довольно близка к стационарным волновым пакетам типа солитонов, которые описываются формулами (4,15). Описанный здесь процесс самомодуляции качественно согласуется с экспериментами, проводившимися для гравитационных волн на глубокой воде<sup>31, 32</sup>, как это можно видеть на рис. 14, заимствованном из работы<sup>32</sup>.

## 5. ЭЛЕКТРОЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

При распространении электромагнитных волн в сплошной среде часто оказываются существенными упоминавшиеся выше эффекты электрострикции, которые проявляются в том, что давление высокочастотного поля электромагнитной волны изменяет плотность среды  $\rho$ , а с ней и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(\omega, \rho)$ .

В этом случае модуляционные процессы в электромагнитных волнах сопровождаются связанными с ними акустическими колебаниями (электрозвуковые волны). Распространение электрозвуковых волн описывается системой уравнений Максвелла совместно с уравнениями гидродинамики (для жидкостей и газов):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_E, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5,1)$$

где  $\mathbf{f}_E$  — плотность сил давления электромагнитного поля, которую согласно работе <sup>44</sup> можно написать в виде

$$\mathbf{f}_E = \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla (|E|^2 \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho}) - |E|^2 \nabla \epsilon \right\}. \quad (5,2)$$

Стрикционные эффекты, в частности, могут играть преобладающую роль в изотропной достаточно разреженной плазме <sup>45-52</sup> \*). Подставляя в (5,2) выражение для диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m_e \omega^2}$ , где  $n = n\{|E|^2\}$  — плотность частиц (зависящая от поля), придем к выражению, впервые полученному в <sup>45</sup>:

$$\mathbf{f}_E = -\frac{n e^2}{4m_e \omega^2} \nabla |E|^2. \quad (5,3)$$

Из (5,3) видно, что градиент сил давления электромагнитного поля направлен в сторону уменьшения плотности энергии поля, т. е. плотность частиц плазмы меньше там, где поле больше, и наоборот. В результате оказывается, что достаточно сильное электромагнитное поле может распространяться в неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ), где слабо затухают ионно-звуковые колебания, даже в том случае, когда равновесное значение диэлектрической постоянной  $\epsilon(n_0) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  отрицательно, т. е. частота поля меньше критической:  $\omega^2 < \omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e$  <sup>50, 51</sup>. Поле в этом случае распространяется в форме электрозвуковых солитонов, описываемых соотношениями (при  $\omega_0 - \omega \ll \omega_0$ )

$$E(x, t) = a \operatorname{sech} [\mu(x - Vt)], \quad (5,4)$$

$$\mu^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{c^2}, \quad V = c_s \left( 1 - \frac{a^2}{32\pi n_0 T_e |\epsilon_0(\omega)|} \right)^{1/2}; \quad (5,5)$$

здесь  $E(x, t)$  — медленно изменяющаяся амплитуда электрического поля, а  $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$  — скорость ионного звука. Ход плотности внутри солитона определяется при этом выражением

$$n(x, t) = n_0 \left\{ 1 - \frac{2(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega_0^2} \operatorname{sech} [\mu(x - Vt)] \right\}, \quad (5,6)$$

т. е. внутри солитона плотность плазмы меньше, чем в невозмущенной плазме, благодаря чему поле оказывается «запертым» в солитоне.

Из (5,5) следует, что скорость распространения электрозвукового солитона всегда меньше скорости звука  $c_s$  и приближается к последней,

\*) Относительно других сред см., например, работы <sup>53, 35, 38, 50</sup>.

если максимальная амплитуда  $a$  убывает. Из (5,5) также видно, что наибольшее возможное значение амплитуды  $a$  есть  $E_c$ ,

$$E_c = (32\pi n_0 T_e |\epsilon_0(\omega)|)^{1/2}. \tag{5,7}$$

При  $a \rightarrow E_c$  скорость солитона стремится к нулю. Записывая формулу (5,4) для этого случая в виде

$$E(x) = (E_c \operatorname{sech} [\mu(x - x_0)]), \tag{5,8}$$

где  $x_0$  — координата вершины «предельного» солитона, получаем выражение для поля в стационарном нелинейном скин-слое при нормальном падении на бесстолкновительную плазму плоской электромагнитной волны<sup>49</sup>. Величина  $x_0$  при этом определяется значением амплитуды поля на границе плазмы:  $E_0 = E_c \operatorname{sech}(\mu x_0)$  (рис. 15). При  $E_0 > E_c$  плазма «не выдерживает» давления поля волны и стационарное состояние плазмы невозможно. Если же на плазму падает волна с переменной амплитудой, т. е.  $E_0 = E_0(t)$ , то при определенных условиях от скин-слоя «отщепляются» электровзвучковые волны \*), которые по мере распространения внутрь плазмы трансформируются в солитоны, описываемые формулами (5,4) — (5,6)<sup>51</sup>.

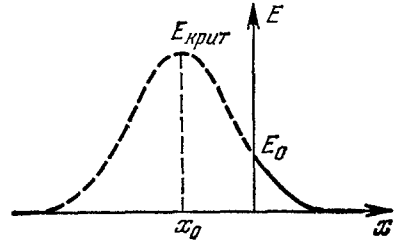


Рис. 15.

## 6. ДИНАМИЧЕСКОЕ И СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

### 6.1. Трехволновые процессы

Рассмотрим теперь общий случай трехмерных нелинейных колебаний. Разумеется, в самом общем случае вряд ли можно продвинуться достаточно далеко — полной математической теории решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных пока не существует. Однако, если предположить, что амплитуда колебаний не очень велика, то можно воспользоваться методом теории возмущений<sup>54-60</sup>. В первом приближении мы имеем просто линейную теорию с принципом суперпозиции, так что произвольное возмущение можно представить в виде совокупности собственных колебаний:

$$\Psi = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}}^0 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}}t), \tag{6,1}$$

где величина  $\Psi$  имеет, вообще говоря, несколько компонент,  $\Psi_{\mathbf{k}}^0$  — поляризованный «вектор» (нормированный соответствующим образом),  $a_{\mathbf{k}}$  — амплитуда (комплексная),  $k$  — волновое число,  $\omega_{\mathbf{k}}$  — собственная частота. Если учесть теперь слабую нелинейность, то в уравнениях движения благодаря наличию квадратичных членов появятся слагаемые вида  $a_{\mathbf{k}'} \times a_{\mathbf{k}''} \exp[i(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' ) \mathbf{r} - i(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}) t]$ . Это слагаемое играет роль вынуждающей силы с частотой  $\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}' + \mathbf{k}''$ . Заметим, что в силу действительности  $\Psi$  и  $\Psi_{\mathbf{k}}^0$  среди членов суммы (6,1) обязательно должны быть попарно сопряженные слагаемые, так что  $a_{-\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}}^*$ ,  $\omega_{-\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}$ . Поэтому наряду с указанным выше должна присутствовать

\*) Генерация электровзвучковых волн происходит наиболее эффективно, если характерное время модуляции амплитуды  $T$  имеет порядок  $1/c_s\mu$ , т. е. времени прохождения звуком длины скин-слоя.

также вынуждающая сила на разности частот  $\omega_{k'} - \omega_{k''}$  и волновых векторах  $k' - k''$ . Наглядно появление биений на комбинационных частотах  $\omega_{k'} + \omega_{k''}$  и волновых векторах  $k' + k''$  можно продемонстрировать рис. 16, где представлено наложение двух плоских волн. Каждую из штриховок рис. 16 можно рассматривать как волну ступенчатого вида, в которой амплитуда скачком меняется от нуля до единицы: нуль, где черная линия, и единица между ними (см. нижнюю часть рис. 16). При наложении (пересечении) таких волн образуется их произведение — черные полосы, где хотя бы одна из амплитуд «черная», и белое поле между ними. Как мы видим, при наложении волн образуется муар — волна с волновым вектором  $k' - k''$ . (Кроме того, появляется более частая рябь на сумме  $k' + k''$ ). При распространении волн  $k', k''$  побегит и муар, и если он совпадает с одной из собственных волн, т. е.  $\omega_{k'} + \omega_{k''}$  окажется равной

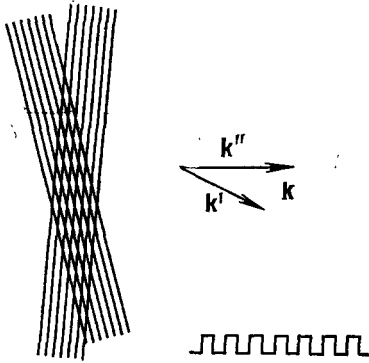


Рис. 16.

собственной частоте  $\omega_k$ , отвечающей волновому вектору биений  $k = k' + k''$ , то нелинейная вынуждающая сила приведет к расщеплению волны  $k$ . При этом амплитуда волны будет медленно изменяться со временем, так что

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = \sum_{k'} V_{k, k', k''} a_{k'} a_{k''} e^{-i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t}. \quad (6,2)$$

Здесь  $k'' = k - k'$ , поскольку уравнение (6,2) представляет собой фурье-гармонику с волновым вектором  $k$  от исходного нелинейного уравнения движения, а  $V_{k, k', k''}$  — матричный элемент взаимодействия, который определяется конкретным видом уравнения движения. Если расстройка  $\Delta =$

$= \omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k$  обращается в нуль и наступает резонанс, то даже при малой нелинейности по прошествии достаточно большого времени может произойти сильное изменение амплитуд колебаний — одна волна может распасться на две другие или две волны слиться в одну. Такие процессы, в которых во взаимодействии вступают три волны, называются трехволновыми, а спектр (зависимость частоты  $\omega_k$  от  $k$ ), для которого условие  $\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k''}$  может быть удовлетворено, называется распадным.

Особенно легко распадные условия выполняются в плазме ввиду обилия различных ветвей колебаний<sup>24, 61</sup>. Например, в сжимаемой плазме ( $\beta = \frac{H^2}{8\pi n T} \neq \infty$ ) альвеновские и магнитозвуковые волны, хотя сами по себе они и не являются распадными, могут распадаться на пару из альвеновской и магнитозвуковой волн. А геликоны (свисты) оказываются распадными даже сами по себе. Много примеров распадных процессов можно привести также из области нелинейной оптики<sup>62, 63</sup>.

Трехволновые процессы приводят к возможности трансформации одних волн в другие и тем самым порождают сложный процесс переноса энергии в фазовом пространстве волновых чисел.

### 6.2. Взаимодействие трех волн

Рассмотрим максимально простой случай, когда имеются только три волны,  $k, k'$  и  $k'' = k - k'$ , связанные между собой резонансным условием. Обозначим их амплитуды через  $a_i$ :  $a_1 = a_k, a_2 = a_{k'}, a_3 = a_{k''}$  и соответственно частоты через  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Будем считать, что все частоты положительные и притом  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 > \omega_2 > \omega_3$ .



Из (6,2) имеем для  $a_1$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = V_1 a_2 a_3, \quad (6,3)$$

где  $V_1 = V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''}$ .

Аналогичным образом можно получить уравнения для  $a_2$  и  $a_3$ . Для этого в первом случае мы в (6,3) вместо  $\mathbf{k}$  подставим  $\mathbf{k}'$ , а  $\mathbf{k}'$  заменим на  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} = V_2 a_1 a_3^*, \quad (6,4)$$

а во втором — вместо  $\mathbf{k}$  подставим  $\mathbf{k}''$  и  $\mathbf{k}'$  опять заменим на  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} = V_3 a_1 a_2^*, \quad (6,5)$$

где  $V_2 = V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}''}$ ,  $V_3 = V_{\mathbf{k}'', \mathbf{k}, -\mathbf{k}'}$ .

В том случае, когда нелинейные уравнения для амплитуд получаются в результате фурье-преобразования исходных дифференциальных уравнений движения в частных производных, коэффициенты  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''}$  имеют одну и ту же фазу — они либо чисто мнимые, либо действительные. Для простоты будем считать их действительными (мнимость можно всегда устранить введением дополнительного множителя  $i$  в амплитуды  $a_{\mathbf{k}}$ ). В уравнениях (6,2) — (6,5) динамическими переменными являются амплитуды  $a_{\mathbf{k}}$ . Изменяя нормировку поляризационных векторов  $\Psi_{\mathbf{k}}^0$  в (6,1), можно вводить в  $a_{\mathbf{k}}$  дополнительные множители, с целью упрощения вида уравнений. Пользуясь этим, пронормируем амплитуды  $a_{\mathbf{k}}$  таким образом, чтобы энергия  $\mathbf{k}$ -й волны  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  равнялась  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2$ . При этом ее импульс  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$  будет равен  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} |a_{\mathbf{k}}|^2$ . По аналогии с квантовой механикой величину  $N_{\mathbf{k}} = |a_{\mathbf{k}}|^2$  можно интерпретировать как число квантов в состоянии  $\mathbf{k}$ . В случае классических процессов эту величину обычно называют числом волн.

В силу законов сохранения энергии и импульса волн при взаимодействии матричных элементов, входящие в уравнения (6,3) — (6,5), не могут быть совершенно произвольными. В самом деле, умножая (6,3) — (6,5) соответственно на  $\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^*$  и  $\mathbf{k}_1 a_{\mathbf{k}}^*$  ( $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}''$ ), складывая их с комплексно сопряженными величинами и учитывая законы сохранения энергии и импульса

$$\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3 = \text{const}, \quad \mathbf{k}_1 N_1 + \mathbf{k}_2 N_2 + \mathbf{k}_3 N_3 = \text{const}, \quad (6,6)$$

получим

$$\omega_2 (V_1 + V_2) + \omega_3 (V_1 + V_3) = 0, \quad \mathbf{k}_2 (V_1 + V_2) + \mathbf{k}_3 (V_1 + V_3) = 0, \quad (6,7)$$

где мы учли, что  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ . Уравнения (6,7) представляют собой систему четырех скалярных уравнений для двух величин,  $V_1 + V_2$  и  $V_1 + V_3$ . Отсюда следует, что  $V_1 = -V_2 = -V_3$ . Кроме того, поскольку замена знака у всех  $\mathbf{k}$  означает переход к комплексно сопряженным величинам, а  $V_i$  мы условились считать действительными, то  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} = -V_{-\mathbf{k}, -\mathbf{k}', -\mathbf{k}''}$ . Кроме того, как видно из (6,2), можно считать, что  $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} = -V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}'}$ . Таким образом, условия симметрии можно представить в виде <sup>59, 63, 64</sup>

$$V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''} = V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'', \mathbf{k}'} = V_{-\mathbf{k}, -\mathbf{k}', -\mathbf{k}''} = -V_{\mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}''} = -V_{\mathbf{k}'', \mathbf{k}, -\mathbf{k}'}. \quad (6,8)$$

Кроме (6,6), уравнения (6,3) — (6,5) имеют еще один интеграл движения. В самом деле, если умножить (6,3) на  $a_1^*$  и (6,4) — на  $a_2^*$  и сложить затем их вместе с комплексно сопряженными соотношениями, то в силу условия симметрии в правой части мы получим нуль, т. е.

$$N_1 + N_2 = \text{const}. \quad (6,9)$$

Аналогичным образом из (6,4), (6,5) можно было бы получить  $N_1 + N_3 = \text{const}$ , но это соотношение является следствием (6,6), (6,9), если учесть, что  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ .

Если вместо  $N_i$  в (6,6), (6,9) подставить квадраты амплитуд  $N_i = a_i^2$ , то мы получим уравнения эллипсоида (6,6) и цилиндра (6,9) с осью вдоль  $a_3$ . Амплитуды  $a_i$  при взаимодействии могут изменяться только таким образом, чтобы точка  $(a_1, a_2, a_3)$  перемещалась по линии пересечения этих поверхностей. Если учесть, что  $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ , то линии пересечения имеют вид рис. 17.

Из этого рисунка видно, что только волна с максимальной частотой  $\omega_1$  может «распадаться», т. е. сильно уменьшать свою амплитуду даже в условиях, когда начальные амплитуды двух других волн малы:  $a_1 \gg a_2, a_3$ . Что касается  $a_2$  и  $a_3$ , то при малом возбуждении резонансно связанных с ними волн они мало изменяют свою амплитуду, совершая небольшие колебания вблизи начального значения. Из этого рисунка в силу его симметрии можно заключить также, что процесс распада волны носит характер периодической конверсии волны  $a_1$  в две другие волны,  $a_2, a_3$ , и возвращения к исходному состоянию.

Вся эта картина сходна со свободным движением твердого тела. В частности, процесс распада волны  $a_1$  в  $a_2, a_3$  сходен со свободным движением несимметричного волчка<sup>65</sup>, приведенного во вращение вокруг оси, проходящей вблизи главной оси инерции такой, что соответствующий момент инерции  $I_2$  лежит между двумя другими,  $I_3 > I_2 > I_1$  (см. рис. 51 в<sup>65</sup>). Это не удивительно, поскольку уравнения для амплитуд (6,3)—(6,5) очень похожи на уравнения Эйлера для свободного движения несимметричного твердого тела. Соответственно сходны и аналитические выражения для движения твердого тела<sup>65</sup> и изменения во времени амплитуд трех резонансно взаимодействующих волн с одной фазой<sup>63</sup>.

### 6.3. Взаимодействие высокочастотных волн с низкочастотными

Рассмотрим другой сравнительно простой случай, когда хотя число взаимодействующих волн и произвольно, но зато одна из волн имеет очень малое волновое число и малую частоту<sup>66</sup>. Этот случай соответствует рис. 15, когда муар от высокочастотных волн может попадать в резонанс с собственной низкочастотной волной.

Обозначим амплитуду низкочастотной волны через  $b$ , а ее волновой вектор и частоту соответственно через  $\kappa$  и  $\nu$ . По предположению,  $\kappa \ll k_0$  волнового числа основной волны с амплитудой  $a_0$ . Как видно из (6,2), во взаимодействие вступают волны с волновыми векторами  $\mathbf{k}_0 + n\kappa$ , амплитуды которых мы обозначим через  $a_n$ . Мы будем считать, что расстройка равна нулю, т. е.  $\omega_k - \omega_{k-n} = \nu$ . С учетом малости  $\kappa$  получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \kappa = \mathbf{v}_g \kappa = \nu. \quad (6,10)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае малых  $\kappa$  условие резонанса соответствует совпадению групповой скорости ВЧ пакета и фазовой скорости низкочастотных волн. Поскольку  $\kappa$  мал, то матричный элемент в (6,2) можно считать не зависящим от  $n$ , так что уравнение для  $a_n$  можно

записать в виде

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} = iV (a_{n+1}b^* + a_{n-1}b), \quad (6,11)$$

где  $V$  — просто некоторое число, которое мы будем считать действительным. (Как будет видно из дальнейшего, удобно выбрать такую нормировку амплитуд, чтобы матричный элемент взаимодействия  $iV$  был чисто мнимым). Аналогично для  $b$  имеем

$$\frac{\partial b}{\partial t} = iV \sum_n a_n a_{n-1}^*. \quad (6,12)$$

Мы считаем, что матричные элементы взаимодействия в (6,11) и (6,12) совпадают, что имеет место при определенной нормировке амплитуд  $a_n$  и  $b$ .

Допустим, что в начальный момент была возбуждена только одна волна с амплитудой  $a_0^0$  и имелась малая примесь низкочастотной волны  $b$ . Примем для простоты, что величина  $b$  — действительна (фаза  $b$  зависит от выбора начала координат). Тогда, воспользовавшись известным рекуррентным соотношением для функций Бесселя  $2 \frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$ , нетрудно проверить, что решением (6,11) является

$$a_n = a_0^0 i^n J_n \left( 2V \int b dt \right). \quad (6,13)$$

Отсюда видно, что за счет взаимодействия с низкочастотной волной по мере возрастания времени появляются все более и более высокие гармоники  $a_n$ , причем при  $t \rightarrow \infty$  они в среднем выравниваются. Появление гармоник  $a_n$  соответствует просто модуляции исходной волны, что видно из соотношения

$$\Psi = \sum_n a_n \Psi_n^0 e^{-i(\omega_n t - \mathbf{k}_n \mathbf{r})} = e^{-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} \sum_n a_n \Psi_n^0 e^{i(n\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - n\omega_0 t)}. \quad (6,14)$$

Если, в дополнение к сделанным выше предположениям, можно считать, что зависимость  $\Psi_n^0$  от  $n$  можно пренебречь, то (6,14) принимает вид

$$\Psi = a_0^0 \Psi_0^0 e^{i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t)} \exp \{ i [ \mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t ] - i\lambda \cos (vt - \mathbf{k}\mathbf{r}) \},$$

где  $\lambda = 2V \int b dt$ . Отсюда видно, что в рассматриваемом случае модуляция волны является чисто фазовой.

Подставляя найденные выражения для  $a_n$  из (6,13) в уравнение (6,12) для  $b$ , получим

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -V \sum_n J_n(\lambda) J_{n-1}(\lambda). \quad (6,15)$$

Но выражение справа в силу известной теоремы сложения для функций Бесселя обращается в нуль. Таким образом, модуляция ВЧ волны происходит при постоянной амплитуде низкочастотной волны. Если учесть небольшую несимметрию матричных элементов взаимодействия, т. е. их зависимость от  $n$ , то амплитуда низкочастотной волны также будет изменяться со временем — либо нарастать, либо испытывать низкочастотные колебания. Все зависит от того, в какую сторону — стоксову или антистоксову — преобладает трансформация ВЧ волн.

#### 6.4. Слабая турбулентность

Эффект нарастания числа гармоник и стремления к распределению энергии по очень большому числу волн сохраняется и в общем случае произвольных трехволновых процессов. Если число возбужденных волн очень велико, то за счет взаимодействия с большим числом волн фаза

каждой отдельной волны сложным нерегулярным образом изменяется во времени, так что весь процесс обмена энергией приобретает нерегулярный характер. Но именно в силу этой нерегулярности можно перейти и к другому языку описания, используя статистический подход. В этом предельном случае полагают, что фазы волн представляют собой случайные величины, которые можно считать практически некоррелированными — такая аппроксимация хорошо известна в физике как приближение хаотических фаз.

В приближении хаотических фаз задача описания динамики нелинейных волн сводится к определению зависимости от времени средних значений квадратов амплитуд, т. е.  $N_k(t)$ . Соответствующие уравнения для  $N_k$  можно получить усреднением по фазам уравнений (6,2). Для этого умножим сначала (6,2) на  $a_k^*$ , сложим полученный результат с комплексно сопряженным и усредним по фазам:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \sum_{k'} V_{k, k', k''} \langle a_k^* a_{k'} a_{k''} \rangle e^{-i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t} + \text{к. с.} \quad (6,16)$$

где угловые скобки означают усреднение по фазам,  $N_k = |a_k|^2$ , а к. с. — означает комплексно сопряженное выражение. Если считать фазы хаотическими, а амплитуды  $a_k$  совершенно не коррелированными, то в правой части (6,16) мы получим просто нуль. На самом деле малая корреляция между амплитудами  $a_k$  все же возникает в силу самого уравнения для амплитуд (6,2) из-за его нелинейности. При малых  $a_k$  эта корреляция, естественно, очень слабая. Чтобы ее учесть, представим  $a_k$  в виде  $a_k^0 + \delta a_k$ , где  $a_k^0$  — основная часть амплитуды со случайной фазой (эту часть амплитуды можно считать не зависящей от времени), а  $\delta a_k$  — малая добавка, учитывающая корреляцию амплитуд. В первом приближении по корреляции уравнение (6,2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta a_k) = \sum_{k'} V_{k, k', k''} a_k^0 a_{k'}^0 a_{k''}^0 e^{-i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t}. \quad (6,17)$$

Это уравнение можно проинтегрировать по времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и, в предположении, что при  $t \rightarrow -\infty$  корреляция ослабевает, т. е. в экспоненте (6,17) содержится малая добавка  $\nu t$  ( $\nu > 0$ ), получим

$$\delta a_k = \sum_{k'} V_{k, k', k''} a_k^0 a_{k'}^0 a_{k''}^0 \pi \delta(\omega_k + \omega_{k''} - \omega_{k'}). \quad (6,18)$$

Здесь мы сохранили только действительную часть от интеграла от экспоненты, которая только и войдет в окончательный результат, и, кроме того, опустили индекс нуль у  $a_{k'}$ ,  $a_{k''}$  в правой части.

Подставим теперь в правую часть (6,16) вместо каждой из амплитуд  $a_k = a_k^0 + \delta a_k$  и сохраним только члены четвертого порядка по амплитудам. В полученном выражении все фазы можно уже считать некоррелированными, так что средние значения от четверных произведений превратятся в произведение парных корреляционных функций, т. е. они выразятся через произведения  $N_k$ . Поскольку таких слагаемых много, то вся эта процедура выглядит несколько громоздко, однако окончательный результат после учета условий симметрии матричных элементов (6,8) очень прост:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \int W_{kk'} (N_{k'} N_{k''} - N_k N_{k'} - N_k N_{k''}) \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \frac{dk'}{(2\pi)^3}, \quad (6,19)$$

где  $k'' = k - k' *$ .

\* Уравнение (6,19) совпадает по форме с известным кинетическим уравнением для фононов в твердом теле (см., например, <sup>67</sup>) в классическом пределе ( $\hbar \rightarrow 0$ ).

Вместо суммы по  $\mathbf{k}'$  мы записали здесь интеграл, как это обычно делается при переходе к непрерывной переменной:  $\sum_{\mathbf{k}'} \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}$ . В уравнении (6,19) вероятность перехода  $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  очень просто выражается через матричный элемент взаимодействия (по предположению, действительный):

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} = 2\pi V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^2. \quad (6,20)$$

Как нетрудно проверить, и это вполне естественно, правая часть уравнения (6,19), которую можно назвать членом столкновений между волнами, сохраняет энергию и импульс волн. Отсюда следует, в частности, что уравнение (6,19) имеет в качестве стационарного решения распределение Рэля — Джинса  $N_{\mathbf{k}} = \frac{\text{const}}{\omega_{\mathbf{k}}}$ . Это легко проверить непосредственной подстановкой  $N_{\mathbf{k}} = \mathcal{E}_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}} = \frac{\text{const}}{\omega_{\mathbf{k}}}$  в правую часть (6,19) с учетом наличия  $\delta$ -функции под интегралом.

Совокупность большого числа волн, слабо взаимодействующих между собой, принято называть слабой турбулентностью. Таким образом, уравнение (6,20) можно рассматривать как кинетическое уравнение для слабой турбулентности при учете одних лишь трехволновых процессов взаимодействия.

Оказывается, что слабая турбулентность может обладать свойствами, сходными с сильной турбулентностью. Как было показано в работах <sup>68, 69</sup>, во многих случаях вероятности переходов  $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  в (6,19) обладают тем свойством, что переходы с сильным изменением волнового числа оказываются заметно меньше вероятностей перехода с изменением  $\mathbf{k}$  на величину порядка  $\mathbf{k}$ . Вследствие этого при слабой турбулентности также может иметь место процесс эстафетной передачи энергии по спектру, предложенный впервые для обычной турбулентности Колмогоровым <sup>70</sup> и Обуховым <sup>71</sup>. С учетом квадратичности по  $N_{\mathbf{k}}$  члена взаимодействия (6,19), условие передачи энергии по спектру позволяет определить спектр колебаний  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  без детального решения кинетического уравнения для волн.

Рассмотрим, например, случай капиллярных волн <sup>69</sup>, обладающих распадным спектром колебаний  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$ . Пусть  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$  — спектральная функция энергии, т. е.  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} dk$  представляет собой энергию колебаний в интервале  $dk$  (здесь мы считаем  $k$  скаляром — абсолютной величиной волнового вектора). Обозначим через  $\dot{\mathcal{E}}$  поток энергии по спектру. Величина  $\dot{\mathcal{E}}$ , очевидно, пропорциональна  $k \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ , которая согласно кинетическому уравнению для волн должна быть пропорциональна квадрату  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}^2$ , т. е. с учетом размерности  $\dot{\mathcal{E}} = A \omega_{\mathbf{k}} (\mathcal{E}_{\mathbf{k}} k)^2 k^2 / \sigma$ . Здесь  $\sigma/k^2$  — единственная, имеющаяся в нашем распоряжении величина с размерностью энергии — добавлена нами для того, чтобы  $A$  была безразмерной константой. Отсюда находим

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \text{const} \cdot (\dot{\mathcal{E}})^{1/2} (\sigma \rho)^{1/4} k^{-11/4}, \quad N_{\mathbf{k}} \sim k^{-17/4}. \quad (6,21)$$

Этот спектр является точным решением кинетического уравнения для волн <sup>69</sup>. Он соответствует области инерционной нелинейной передачи энергии по спектру в сторону больших волновых чисел, где происходит диссипация на вязкости.

## 6.5. Четырехволновые процессы

Если спектр нераспадный, т. е. зависимость  $\omega_{\mathbf{k}}$  от  $\mathbf{k}$  такая, что удовлетворить соотношению  $\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} = \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$  нельзя, то приходится учитывать следующий, кубичный по амплитуде член взаимодействия волн. В этом случае резонансная перекачка энергии волн по спектру происходит за счет четырехволновых процессов, когда выполнены условия

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (6,22)$$

для превращения двух волн,  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ , в две другие,  $\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ , или аналогичные условия для распада одной волны на три или слияния трех волн в одну. В этом случае взаимодействие является малым третьего порядка по амплитуде, а в случае хаотических фаз — третьего порядка по числу волн  $N_{\mathbf{k}}$ . Разумеется, четырехволновые процессы являются основными и в том случае, когда с самого начала нелинейность является кубической, как, например, в рассмотренном выше уравнении (4,8), описывающем самофокусировку и самосжатие волновых пакетов. Сами же эти процессы можно рассматривать и на языке четырехволновых взаимодействий волн с близкими волновыми векторами  $\mathbf{k}, \mathbf{k} \pm \kappa$ <sup>72, 31, 32</sup>. Более подробно с четырехволновыми процессами можно познакомиться в<sup>56, 60, 62, 63, 73</sup>.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из данного обзора, за последние годы в теории нелинейных волн произошло совершенно определенное перемещение круга интересов от исследования отдельных нелинейных волн, — например, простых и ударных волн или волн Стокса на поверхности жидкости — к изучению целых классов нелинейных волновых процессов. Одним из таких классов являются волны в слабо диспергирующих средах. Для очень большого числа объектов такие волны описываются уравнением Кортевега — де Вриза. Благодаря численным расчетам и глубоким аналитическим исследованиям достигнута большая ясность не только в стационарных, но и в зависящих от времени решениях этого уравнения.

Другой класс явлений, привлекающих большое внимание в различных областях физики, представляют собой медленные нелинейные процессы в почти-периодических волнах — самофокусировка и самосжатие волновых пакетов. Эти процессы интенсивно исследуются в нелинейной оптике, где они уже превратились в одно из традиционных направлений. Более неожиданными они оказались для гидродинамиков — теоретическое и экспериментальное доказательство неустойчивости периодических волн Стокса на глубокой воде, нахождению профиля и на доказательство существования которых было затрачено так много усилий, позволило совершенно по-новому взглянуть на волновое движение жидкости.

Явления самофокусировки и самосжатия волновых процессов представляют собой частный случай более обширного класса явлений — индуцированного рассеяния волн на волнах. В оптике примером такого процесса может служить индуцированное рассеяние света на фононах, соответствующее эффекту Манделъштама — Бриллюэна. Явления индуцированного рассеяния волн на волнах играют большую роль в плазме, где часто могут разыгрываться сложные нелинейные процессы с возбуждением очень большого числа волн. Аналогичное явление имеет место при возбуждении широкого спектра волн на воде. Эти явления носят характер стохастического взаимодействия волн друг с другом; они получили название слабой турбулентности. Слабая турбулентность имеет много общего с взаимодействием фононов в твердых телах, представляя, таким образом,

довольно широкий круг физических явлений. К настоящему времени ее теория, основанная на разложении по малому взаимодействию волн между собой, развита достаточно полно, и она, по-видимому, сможет послужить исходным пунктом для исследования более сложных стохастических процессов с большими амплитудами умеренной и сильной турбулентности.

Институт атомной энергии  
им. И. В. Курчатова  
ИЗМИРАН

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Burgers, Proc. Acad. Sci. Amsterdam 43, 2 (1940).
2. E. Hopf, Comm. Pure Appl. Math. 3, 201 (1950).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1953.
4. M. J. Lighthill, Surveys in Mechanics, Cambridge Univ. Press, 1956.
5. D. J. Korteweg, G. de Vries, Phil. Mag. 39, 442 (1895).
6. C. S. Gardner, G. K. Morikawa, Courant Inst. of Math. Sci. Rept. NJO, 9082 (1960).
7. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ 46, 1880 (1964).
8. K. W. Morton, Phys. Fluids 7, 1801 (1964).
9. В. Е. Захаров, ПМТФ, № 3, 167 (1964).
10. H. Washimi, T. Taniuti, Phys. Rev. Lett. 17, 966 (1966).
11. N. J. Zabusky, N. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965).
12. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ 51, 1557 (1966).
13. N. J. Zabusky, Proc. Int. School of Nonlinear Partial Differential Equations, Acad. Press, N. Y., 1967.
14. C. S. Gardner, J. M. Greene, N. D. Kruskal, R. M. Miura, Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).
15. В. И. Карпман, Phys. Lett. 25A, 708 (1967).
16. R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal, J. Math. Phys. 9, 1204 (1968).
17. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем. 15, 309 (1951).
18. В. А. Марченко, ДАН СССР 194, 695 (1955).
19. В. И. Карпман, ЖЭТФ 52, 1657 (1967).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, М., Физматгиз, 1963.
21. В. И. Карпман, Phys. Lett. 26A, 619 (1968).
22. В. И. Карпман, В. П. Соколов, ЖЭТФ 54, 1568 (1968).
23. N. J. Zabusky, Phys. Rev. 168, 124 (1968).
24. Р. З. Сагдеев, Вопросы теории плазмы, т. 4, М., Атомиздат, 1964, стр. 20.
25. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Изв. вузов (Радиофизика) 10, 1376 (1967).
26. Р. Х. Куртмуллаев, Ю. Н. Нестерихин, В. И. Пильский, Р. З. Сагдеев, Proc. Culham Conf., vol. 2, 1965, Rep. CN-21/218, стр. 367. В. Г. Еселевич, Р. Х. Куртмуллаев, В. И. Пильский, Письма ЖЭТФ 5, 311 (1967).
27. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ 42, 1567 (1962).
28. Е. Б. Кадомцев, В. И. Петвишвили, ДАН СССР 192, 753 (1970).
29. M. J. Lighthill, а) J. Inst. Math. Appl. 1, 269 (1965); б) Proc. Roy. Soc. A299, 28 (1967).
30. Г. Ламб, Гидродинамика, М., Гостехиздат, 1947.
31. T. V. Benjamin, J. E. Feir, J. Fluid Mech. 27, 417 (1967).
32. T. V. Benjamin, Proc. Roy. Soc. A299, 59 (1967).
33. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ. 81, 16 (1944).
34. R. Y. Chiao, F. Gardmire, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett. 13, 479 (1964).
35. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, в сборнике «Нелинейная оптика» (Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике), Новосибирск, «Наука», СО, 1968.
36. С. А. Ахманов, А. П. Сухорукоев, Р. В. Хохлов, УФН 93, 19 (1967).
37. G. V. Whitham, Proc. Roy. Soc. A283, 283 (1965).
38. G. V. Whitham, J. Fluid Mech. 22, 273 (1965); Proc. Roy. Soc. A299, 6 (1967).
39. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 20, 1064 (1950).
40. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, Новосибирск, Изд. Новосибирского ун-та, 1968.

41. А. В. Гуревич, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ 58, 2012 (1970).
  42. В. И. Карпман, Письма ЖЭТФ 6, 829 (1967).
  43. В. И. Карпман, Е. М. Крушкаль, ЖЭТФ 55, 530 (1968).
  44. Л. П. Пятаевский, ЖЭТФ 39, 1450 (1960).
  45. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ 34, 242 (1958).
  46. Р. З. Сагдеев, Кандидатская диссертация (Москва, 1958).
  47. Т. Ф. Волков, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, М., Изд-во АН СССР, т. 3, стр. 336; т. 4; стр. 98, 1958.
  48. А. Г. Литвак, Изв. вузов (Радиофизика) 9, 675 (1966).
  49. В. П. Силин, ЖЭТФ 53, 1662 (1967).
  50. В. Ц. Гурович, В. И. Карпман, ЖЭТФ 56, 1952 (1969).
  51. В. И. Карпман, Письма ЖЭТФ 9, 480 (1969).
  52. Л. М. Горбунов, Гидродинамика плазмы в сильном высокочастотном поле, Препринт ФИАН № 174 (1969).
  53. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Письма ЖЭТФ 3, 137 (1966).
  54. О. М. Phillips, J. Fluid Mech. 9, 193 (1960).
  55. F. J. Fishman, A. R. Kantrowitz, H. E. Petschek, Rev. Mod. Phys. 32, 959 (1960).
  56. А. А. Веденов, Вопросы теории плазмы, т. 3, М., Атомиздат, 1963, стр. 203.
  57. Б. Б. Кадомецев, Вопросы теории плазмы, т. 4, М., Атомиздат, 1964, стр. 218.
  58. В. П. Силин, ПМТФ 1, 31 (1964).
  59. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 5, 20 (1965).
  60. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, М., «Наука», 1967.
  61. В. Н. Оравский, Ядерный синтез 4, 263 (1964).
  62. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, М., изд. ВИНТИ, 1964.
  63. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, М., «Мир», 1966.
  64. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман, ЖЭТФ 47, 1552 (1964).
  65. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, М., Физматгиз, 1958.
  66. A. S. Wakai, Nuclear Fusion 10, 53 (1970).
  67. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, М., ИЛ, 1956.
  68. В. Е. Захаров, ПМТФ 4, 25 (1965).
  69. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, ПМТФ, № 5, 62 (1967).
  70. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР 30 (4), 299 (1941).
  71. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. 5 (5), 453 (1941).
  72. В. Е. Захаров, ЖЭТФ 51, 1107, 1966; ПМТФ, № 2, 86 (1968).
  73. O. M. Phillips, Proc. Roy. Soc., A299, 104 (1967).
-